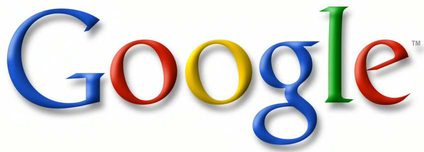
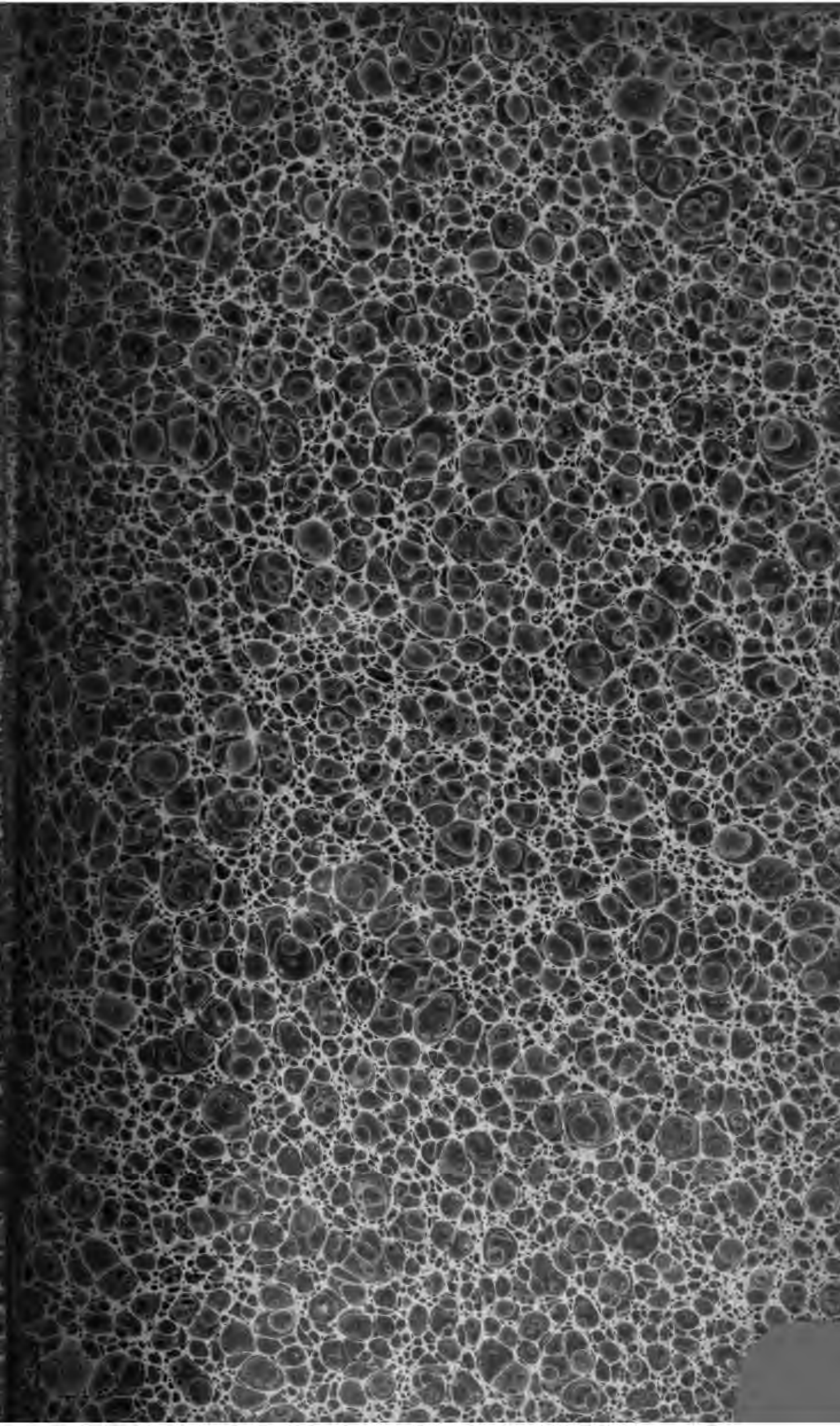






LEÇONS D'ALGÈBRE.

Paris. — Imprimé par E. Thunot et Cie, rue Racine, 26.

LEÇONS
D'ALGÈBRE

CONFORMES

AUX PROGRAMMES OFFICIELS DE L'ENSEIGNEMENT DES LYCÉES,

PAR CHARLES BRIOT,

PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES AU LYCÉE SAINT-LOUIS,
MAÎTRE DE CONFÉRENCES A L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE.



PREMIÈRE PARTIE,

A L'USAGE DES ÉLÈVES DES LYCÉES

ET DES CANDIDATS AU BACCALAURÉAT ÈS SCIENCES, A L'ÉCOLE DE MARINE
ET A L'ÉCOLE MILITAIRE DE SAINT-CYR.



SIXIÈME ÉDITION.



PARIS

DUNOD, ÉDITEUR,

SUCCESSEUR DE Vor DALMONT,

Précédemment Carilian-Gœury et Vor Dalmont,

LIBRAIRE DES CORPS IMPÉRIAUX DES PONTS ET CHAUSSÉES ET DES MINES,

49, Quai des Augustins, 49.



1863

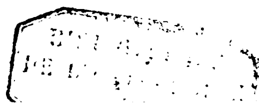


TABLE DES MATIÈRES.

INTRODUCTION.

LIVRE Ier.

CALCUL ALGÉBRIQUE.

LIVRE II.

ÉQUATIONS DU PREMIER DEGRÉ.

LIVRE III.

ÉQUATIONS DU SECOND DEGRÉ.

LIVRE IV.

PROGRESSIONS ET LOGARITHMES.

Nota. Les questions marquées d'un astérisque font partie du programme d'admission à l'École polytechnique.

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES.

LEÇONS D'ALGÈBRE.

INTRODUCTION.

EMPLOI DES SIGNES ET DES LETTRES COMME MOYEN D'ABRÉVIATION ET DE GÉNÉRALISATION.

Signes algébriques.

1. Pour abréger l'écriture et faciliter le raisonnement, on est convenu de représenter les quantités par des lettres. On a coutume d'affecter les premières lettres de l'alphabet a, b, c,... aux quantités connues, les dernières x, y, z,... aux quantités inconnues.

On a imaginé aussi des signes pour indiquer les diverses opérations de l'arithmétique.

Le signe $+$, que l'on prononce *plus*, indique l'addition. Ainsi, 5 plus 3 s'écrit

$$5+3.$$

Le signe $-$, que l'on prononce *moins*, indique la soustraction. Ainsi, 5 moins 3 s'écrit

$$5-3.$$

Le signe $\times$, que l'on prononce *multiplié par*, indique la multiplication. Ainsi, 5 multiplié par 3 s'écrit

$$5 \times 3.$$

Pour abréger encore davantage, lorsque les quantités sont représentées par des lettres, on indique leur produit en mettant simplement ces lettres les unes à la suite des autres, et sous-entendant le signe $\times$. Ainsi, le produit $a \times b \times c$ s'écrit plus simplement

$$abc.$$

Le produit $4 \times a \times b \times c$ s'écrira

$$4abc.$$

On indique la division par une barre horizontale au-dessus de laquelle on écrit le dividende, au-dessous le diviseur. Ainsi, 5 divisé par 3 s'écrit

$$\frac{5}{3}.$$

C'est le signe de la fraction en arithmétique.

On indique la puissance d'un nombre, ou le produit de plusieurs facteurs égaux à ce nombre, par des petits chiffres placés en haut et à droite et marquant le nombre des facteurs ou le degré de la puissance. Ainsi, la troisième puissance de la quantité a s'écrit

$$a^3.$$

Le nombre 3 se nomme *exposant*.

On indique la *racine* par le signe $\sqrt{}$, au-dessous duquel on écrit le nombre dont on extrait la racine. Ainsi, la racine quatrième de la quantité a s'écrit

$$\sqrt[4]{a}.$$

L'*indice* du radical, qui est ici 4, se met dans l'ouverture.

Cependant, quand il s'agit de racines carrées, on se dis-

pense de mettre l'indice 2. Ainsi la racine carrée de a s'écrit simplement

$$\sqrt{a}.$$

On se sert du signe $=$, que l'on prononce *égale*, pour exprimer l'égalité de deux quantités. Ainsi, 5 plus 3 égale 8 s'écrit

$$5+3=8.$$

Le signe $>$ veut dire *plus grand que*, le signe $<$ *plus petit que*. Ainsi 5 plus grand que 3 s'écrit

$$5>3.$$

Au contraire 3 plus petit que 5 s'écrit

$$3<5.$$

On remarquera que ces signes d'inégalité ont la forme d'un angle, et que la quantité la plus grande est toujours placée du côté de l'ouverture de l'angle.

Quelques exemples feront bien comprendre l'utilité de ces différents signes et le but de l'algèbre.

Emploi des signes comme moyen d'abréviation.

2. PROBLÈME I. *Partager* 50 *francs entre trois personnes, de manière que la première ait* 6 *francs de plus que la seconde, la seconde* 4 *francs de plus que la troisième.*

Voici comment on peut résoudre cette question avec les seules ressources de l'arithmétique.

Il est clair que si l'on connaissait l'une des parts, on obtiendrait ensuite facilement les deux autres. Cherchons, par exemple, la troisième part : la seconde part surpasse la troisième de 4 francs ; la première, surpassant la seconde de 6 francs, surpasse la troisième de 4 plus 6, c'est-à-dire de 10 francs. La somme des trois parts se compose donc de trois fois la troisième part, plus 4, plus 10, c'est-à-dire

plus 14. Mais cette somme est égale au nombre à partager 50. Si de 50 nous ôtons 14, le reste 36 sera égal à trois fois la troisième part ; si nous divisons 36 par 3, nous aurons la troisième part 12.

Ainsi la troisième part est 12. La seconde, qui la surpasse de 4 francs, est 16. La première, qui surpasse la seconde de 6 francs, est 22.

3. Reprenons la même question en écrivant les raisonnements au moyen des signes de l'algèbre.

Nommons la troisième part. . . . . . . x,
la seconde, qui la surpasse de 4, sera. . . $x+4$,
le première, qui surpasse la seconde de 6,
sera. . . . . $x+4+6$.
La somme des trois parts est. . . . . . . $3x+14$.

Mais cette somme doit être égale au nombre à partager 50, ce qui s'écrit

$$3x+14=50.$$

On nomme *équation* une égalité dans laquelle entre au moins une lettre représentant une quantité inconnue. Les raisonnements qui précèdent nous ont conduit à l'équation

$$3x+14=50.$$

Il s'agit maintenant de résoudre cette équation, c'est-à-dire de trouver la valeur inconnue de x.

Si, de ces deux quantités égales, nous retranchons la même quantité 14, il restera évidemment deux quantités égales,

$$3x=50-14=36.$$

Enfin, si nous divisons par 3, nous aurons

$$x=\frac{36}{3}=12.$$

La question est résolue, puisqu'il suffit de connaître la troisième part pour avoir les deux autres.

4. Problème II. *Partager 167 francs entre quatre personnes, de manière que la première ait 2 francs de plus que la seconde, la seconde 7 francs de plus que la troisième, et la troisième 5 francs de plus que la quatrième.*

Nommons la quatrième part. . . . . x,
la troisième sera. . . . . $x + 5$,
la deuxième. . . . . $x + 5 + 7$,
la première. . . . . $x + 5 + 7 + 2$.

La somme des quatre parts est $4x + 31$; mais cette somme doit être égale au nombre à partager 167, ce qui s'écrit

$$4x + 31 = 167.$$

Pour résoudre cette équation, on opérera comme précédemment. Si l'on retranche 31 des deux côtés, on a

$$4x = 167 - 31 = 136.$$

Si l'on divise ensuite par 4, on trouve

$$x = \frac{136}{4} = 34.$$

Ainsi, la quatrième part est 34 francs; la troisième 39 francs, la deuxième 46 francs, la première 48 francs.
On vérifiera que la somme est bien 167.

5. Problème III. *Partager 53 francs entre deux personnes, de manière que la première ait un tiers de plus que la seconde, plus encore 4 francs.*

Nommons la seconde part. . . . . x,
la première sera. . . . . $x + \frac{x}{3} + 4$.

Or la somme des deux parts doit être égale à 53; on a donc l'équation

$$2x + \frac{x}{3} + 4 = 53.$$

Puisque $2 + \frac{1}{3}$ font $\frac{7}{3}$, $2x + \frac{x}{3}$ font $\frac{7x}{3}$, et l'équation s'écrira plus simplement

$$\frac{7x}{3} + 4 = 53.$$

Pour résoudre cette équation, nous retrancherons d'abord 4 de part et d'autre, ce qui donne

$$\frac{7x}{3} = 53 - 4 = 49.$$

Si nous multiplions ensuite par 3 ces deux quantités égales, nous aurons

$$7x = 49 \times 3 = 147.$$

Enfin, si nous divisons par 7, nous trouvons

$$x = \frac{147}{7} = 21.$$

Quand on connaît la seconde part 21 francs, en y ajoutant son tiers 7 francs et encore 4 francs, on obtient la première part 32 francs. Et effectivement la somme des deux parts fait bien 53 francs.

6. PROBLÈME IV. *Deux personnes possèdent le même capital. La première place le sien à 5 pour 100, la seconde à 3 pour 100. Le revenu de la première surpasse de 400 francs celui de la seconde. Trouver ce capital.*

Rappelons d'abord ce principe établi en arithmétique : pour trouver l'intérêt d'un capital, on multiplie le taux de l'intérêt par le capital et on divise par 100.

Si donc on désigne par x le capital cherché, le revenu de la première personne sera

$$\frac{5x}{100};$$

celui de la seconde

$$\frac{3x}{100}.$$

Puisque le revenu de la première surpasse celui de la seconde de 400 francs, on a l'équation

$$\frac{5x}{100}=\frac{3x}{100}+400.$$

Pour résoudre cette équation, nous retrancherons d'abord $\frac{3x}{100}$ de part et d'autre, ce qui donne

$$\frac{5x}{100}-\frac{3x}{100}=400,$$

ou, en effectuant la soustraction,

$$\frac{2x}{100}=400.$$

Multiplions ensuite par 100, nous avons

$$2x=40000.$$

Divisant enfin par 2, nous trouvons

$$x=\frac{40000}{2}=20000.$$

Ainsi le capital cherché est 20000 francs.

Vérification. Le capital 20000 francs, placé à 5 pour 100, produit 1000 francs de revenu ; placé à 3 pour 100, il ne produit que 600 francs. Le premier revenu surpasse bien le second de 400 francs.

Résolution d'une équation à une inconnue.

7. On voit, par ces exemples, combien l'emploi des lettres et des signes aide l'esprit et facilite le raisonnement. Ce qui précède nous fournit aussi l'occasion de faire quelques remarques utiles sur la résolution des équations.

Nous avons dit qu'on appelle *équation* en algèbre une égalité dans laquelle entre au moins une lettre représentant une inconnue. Les deux quantités égales entre elles sont les deux *membres* de l'équation. Les diverses parties, séparées les unes des autres par le signe + ou par le signe —, sont les termes de l'équation.

Il est aisé de voir que l'on peut faire passer un terme d'un membre dans l'autre; il suffit, pour cela, de l'écrire dans l'autre membre en changeant son signe. Soit, par exemple, l'équation

$$6x - 7 = 13 + 2x.$$

Si nous ajoutons 7 aux deux membres, c'est-à-dire aux deux quantités égales, l'égalité subsiste évidemment et l'équation devient

$$6x = 13 + 2x + 7.$$

Le terme 7, qui avait le signe — dans le premier membre, est passé avec le signe + dans le second membre. De même, si nous retranchons $2x$ des deux membres, l'équation devient

$$6x - 2x = 13 + 7.$$

Le terme $2x$ qui avait le signe + dans le second membre est passé avec le signe — dans le premier.

Ce principe de la transposition des termes est extrêmement utile; il remplace les raisonnements et permet d'opérer en quelque sorte mécaniquement la résolution des équations. On fait passer les termes connus dans un membre, les termes inconnus dans l'autre; on réduit et on divise par le multiplicateur de l'inconnue.

Ainsi l'équation précédente est devenue

$$6x - 2x = 13 + 7.$$

En réduisant, on a

$$4x = 20,$$

et, en divisant par 4,

$$x = \frac{20}{4} = 5.$$

On peut vérifier que 5 est bien la valeur de l'inconnue; car en remplaçant x par 5 dans l'équation proposée, les deux membres deviennent tous deux égaux à 23.

8. Considérons encore l'équation

$$8x - 17 = 5x - 2.$$

On fera d'abord passer le terme 17 dans le second membre en changeant son signe, ce qui donne

$$8x = 5x + 17 - 2.$$

Mais le terme $5x$, qui est en tête de second membre, n'a pas de signe; on procédera comme s'il était affecté du signe + et on le fera passer dans le premier membre avec le signe —; car, si des deux membres on retranche $5x$, on a

$$8x - 5x = 17 - 2.$$

D'où l'on déduit

$$3x = 15,$$
$$x = 5.$$

Quand l'équation contient des dénominateurs, on commence par les faire disparaître en multipliant tous les termes de l'équation par un nombre convenable. Si l'équation ne renferme qu'un seul dénominateur, on multiplie par ce dénominateur. C'est ce que nous avons fait dans les problèmes III et IV. S'il y a dans l'équation plusieurs dénominateurs différents, on multiplie par leur produit ou, plus simplement, par leur plus petit multiple.

9. PROBLÈME V. *Trouver un nombre dont le quart augmenté de 7 égale les deux tiers diminués de 3.*

En appelant x le nombre cherché, on écrira immédiatement l'équation

$$\frac{x}{4} + 7 = \frac{2x}{3} - 3.$$

Pour chasser les deux dénominateurs 3 et 4, nous multiplierons tous les termes par le produit 12 de ces deux dénominateurs, ce qui donne

$$3x + 84 = 8x - 36.$$

Nous remarquons que pour multiplier les deux fractions $\frac{x}{4}$ et $\frac{2x}{3}$ par 12, il suffit de multiplier leurs numérateurs par 3 et 4, en ôtant les dénominateurs.

Par la transposition des termes, l'équation devient

$$84 + 36 = 8x - 3x$$

d'où l'on déduit

$$5x = 120,$$

$$x = \frac{120}{5} = 24.$$

Vérification. — Le quart de 24, augmenté de 7, donne 13; les deux tiers 16, diminués de 3, donnent aussi 13.

Mise des problèmes en équations.

10. La résolution d'un problème comprend deux parties distinctes : on met d'abord le problème en équations, c'est-à-dire que l'on établit par des équations les relations qui existent entre les quantités connues et les quantités inconnues; on résout ensuite les équations, c'est-à-dire que l'on cherche les valeurs des inconnues qui satisfont aux équations. Nous avons indiqué les règles très-simples par lesquelles on résout les équations à une inconnue. La marche à suivre pour mettre un problème en équations n'est pas susceptible d'être formulée d'une manière aussi nette et précise. Dans beaucoup de cas simples, il suffit, après avoir représenté les inconnues par des lettres, d'écrire textuellement l'énoncé du problème au moyen des signes de l'algèbre; c'est ce que nous avons fait notamment pour le problème V. Mais ordi-

nairement l'énoncé du problème ne se prête pas à cette traduction immédiate en langage algébrique; dans ce cas, la meilleure règle à suivre, c'est, après avoir bien examiné les conditions de l'énoncé et représenté les inconnues par des lettres, de raisonner comme si ces lettres représentaient des quantités connues et d'écrire les opérations qu'il faudrait faire pour vérifier que ces valeurs des inconnues satisfont bien à l'énoncé; on arrive ainsi sans grande difficulté aux équations du problème. C'est ainsi que nous avons procédé pour le problème IV; nous avons représenté par x le capital inconnu et, raisonnant comme si ce capital était connu, nous avons écrit que le revenu de la première personne surpasse de 400 francs celui de la seconde. Les exemples suivants feront encore mieux comprendre ce précepte.

11. Problème VI. *Deux fontaines coulent dans un bassin; la première, coulant seule, le remplit en 4 heures; la seconde, coulant seule, le remplit en 6 heures. Combien de temps les deux fontaines, coulant ensemble, mettront-elles à remplir le bassin?*

Désignons par x le nombre d'heures qu'il faut aux deux fontaines pour remplir le bassin; et raisonnons comme si nous voulions nous assurer que, dans ce temps x supposé connu, les deux fontaines, coulant ensemble, remplissent bien le bassin. La première fontaine, coulant seule, remplit le bassin en 4 heures; en une heure, elle verse donc $\frac{1}{4}$ du bassin; en x heures, elle en remplit une fraction marquée par $\frac{x}{4}$. La seconde fontaine, coulant seule, remplit le bassin en 6 heures; en une heure, elle verse $\frac{1}{6}$ du bassin; en x heures, elle en remplit une fraction $\frac{x}{6}$. Dans le temps x, les deux fontaines, coulant ensemble, versent donc une quan-

tité d'eau représentée par $\frac{x}{4}+\frac{x}{6}$, la capacité du bassin étant prise pour unité. Mais, pendant ce temps, elles doivent remplir le bassin; on a donc l'égalité

$$\frac{x}{4}+\frac{x}{6}=1.$$

Telle est l'équation du problème.

Pour la résoudre, on fera d'abord disparaître les dénominateurs; on voit de suite que 12 est le plus petit multiple des nombres 4 et 6. On multipliera donc par 12 tous les termes de l'équation, et nous observons que, pour multiplier par 12 les deux fractions $\frac{x}{4}$ et $\frac{x}{6}$, il suffit de mutiplier leurs numérateurs par 3 et par 2, en ôtant les dénominateurs. L'équation devient ainsi

$$3x+2x=12; \quad \text{d'où} \quad 5x=12.$$

$$x=\frac{12}{5}=2^{h}+\frac{2}{5}=2^{h}\,24^{m}.$$

Ainsi il faut 2 heures et 24 minutes aux deux fontaines, coulant ensemble, pour remplir le bassin.

La vérification a lieu effectivement, si l'on remplace dans l'équation x par sa valeur $\frac{12}{5}$; car les deux fractions $\frac{x}{4}$ et $\frac{x}{6}$ deviennent, après simplification, $\frac{3}{5}$ et $\frac{2}{5}$, dont la somme est 1.

12. PROBLÈME. VII. *Un père a 40 ans, son fils en a 10. Dans combien de temps l'âge du père sera-t-il triple de l'âge du fils?*

Soit x le nombre d'années cherché. Après ce temps, l'âge du père sera $40+x$, l'âge du fils sera $10+x$. Comme à cette époque l'âge du père doit être triple de l'âge du fils, on a l'équation

$$40+x=(10+x)\times 3.$$

La parenthèse indique que la quantité $10 + x$ est multipliée par 3.

Pour répéter trois fois la somme $10 + x$, il suffit évidemment de répéter trois fois chaque partie ; l'équation devient donc

$$40 + x = 30 + 3x;$$

d'où l'on déduit

$$x = 5.$$

Ainsi, dans 5 ans l'âge du père sera triple de l'âge du fils. Et, en effet, à cette époque le père aura 45 ans, le fils 15, et 45 est bien le triple de 15.

13. Problème VIII. *Deux courriers partent au même instant de deux villes distantes de* 100 *lieues et vont à la rencontre l'un de l'autre. Le premier fait* 3 *lieues à l'heure, le second en fait* 2. *Quels chemins les deux courriers parcourront-ils avant de se rencontrer ?*

Le choix de l'inconnue a une grande importance pour la facilité des raisonnements et la simplicité des calculs. Dans le problème actuel, au lieu de prendre les inconnues indiquées par l'énoncé, c'est-à-dire les chemins parcourus, nous prendrons une autre inconnue dont les premières se déduisent aisément, savoir le temps pendant lequel marchent les deux courriers. Soit x ce temps exprimé en heures. Le premier courrier, faisant 3 lieues à l'heure, parcourra en x heures $3x$ lieues ; le second, faisant 2 lieues à l'heure, parcourra dans le même temps $2x$ lieues. Mais la somme des chemins parcourus doit être égale à la distance totale 100 lieues. On a donc l'équation

$$3x + 2x = 100;$$

d'où l'on déduit

$$x = 20.$$

Ainsi les deux courriers se rencontrent après 20 heures

de marche. Le premier aura parcouru 60 lieues, le second 40. La somme est bien égale à 100.

14. Problème IX. *Une montre marque midi; les deux aiguilles, savoir l'aiguille des heures et celle des minutes, sont actuellement au même point du cadran. On demande dans combien de temps, et en quel point du cadran, l'aiguille des minutes rencontrera celle des heures?*

Le cadran d'une montre est divisé en 60 parties égales. Dans une heure, l'aiguille des minutes parcourt les 60 divisions du cadran, tandis que celle des heures n'en parcourt que 5. Prenons l'heure pour unité de temps et appelons x le temps cherché; dans le temps x, l'aiguille des heures parcourt $5x$ divisions, et l'aiguille des minutes $60x$; mais, après ce temps, l'aiguille des minutes, ayant rejoint l'aiguille des heures, a parcouru le tour du cadran, c'est-à-dire 60 divisions, plus $5x$ divisions. On a donc l'équation

$$60x = 60 + 5x;$$

d'où l'on déduit

$$x = \frac{60}{55} = \frac{12}{11} = 1^h\,5^m + \frac{5^m}{11} = 1^h\,5^m\,27^s + \frac{3^s}{11}.$$

Ainsi, la première rencontre aura lieu à $1^h\,5^m\,27^s$ et une fraction $\frac{3}{11}$ de seconde.

La deuxième rencontre aura lieu après un temps égal, c'est-à-dire à $2^h\,10^m + \frac{10^m}{11}$; la troisième, encore après un temps égal, c'est-à-dire à $3^h\,16^m + \frac{4^m}{11}$, etc. La onzième rencontre aura lieu à minuit, après un intervalle de 12 heures.

15. Problème X. *Le soleil s'avance chaque jour de l'ouest à l'est de* $59'\,8'',19$, *la lune de* $13°\,10'\,34'',89$. *La lune est actuellement en conjonction avec le soleil. On demande dans combien de temps elle reviendra en conjonction.*

On dit que la lune est en conjonction avec le soleil quand

ces deux astres sont en ligne droite avec la terre et d'un même côté de la terre; c'est le moment de la nouvelle lune. Prenons pour unité de temps le jour et appelons x le temps cherché. Réduisons les arcs en secondes. Le soleil décrivant 3548″,19 par jour, décrira 3548″,19 $\times x$ en x jours; la lune décrivant 47434″,89 par jour, décrira 47434″,89 $\times x$ secondes dans le même temps. Mais la lune, ayant rejoint le soleil, a décrit dans le ciel une circonférence entière, c'est-à-dire 360° ou 1296000″, plus l'arc décrit par le soleil. On a donc l'équation

$$47434,89x = 1296000 + 3548,19x.$$

On en déduit

$$x = \frac{1296000}{43886,70} = 29^j\ 12^h\ 44^m\ 2^s,7.$$

Ce temps est ce qu'on appelle la durée de la révolution synodique de la lune, ou le mois lunaire.

16. PROBLÈME XI. *Combien faut-il mélanger de vin à 45 centimes le litre et de vin à 33 centimes pour faire 150 litres de mélange à 40 centimes le litre?*

Appelons x la quantité du premier vin qu'il faut mettre dans le mélange; celle du second vin sera $150 - x$.

Un litre du premier vin coûtant 45 centimes, x litres coûteront $45x$ centimes; de même $150 - x$ litres du second vin coûteront $33\,(150 - x)$ centimes. Mais, puisqu'un litre du mélange doit revenir à 40 centimes le litre, le mélange entier doit coûter 40×150 ou 6000^c. On a donc l'équation

$$45x + 33\,(150 - x) = 6000,$$

en prenant le centime pour unité.

Multiplier 33 par $150 - x$ revient à le répéter 150 fois moins x fois, ce qui donne 33×150 ou 4950 moins $33x$. L'équation devient donc

$$45x + 4950 - 33x = 6000;$$

d'où l'on déduit

$$x = \frac{1050}{12} = 87,5 \text{ litres.}$$

En retranchant ce nombre de 150, on a ce qu'il faut prendre du second vin. Ainsi on mélangera 87,5 litres du premier vin avec 62,5 du second.

17. Problème XII. *On a un lingot d'argent pesant* 1245 *grammes au titre* 0,87. *Combien faut-il y ajouter d'un second lingot au titre* 0,95 *pour en élever le titre à* 0,90?

On appelle titre d'un lingot d'or ou d'argent le quantité d'or ou d'argent pur que renferme un gramme du lingot. Appelons x la quantité du second lingot qu'il faut ajouter au premier. Le lingot, formé de l'alliage des deux premiers, pèsera $1245 + x$ grammes.

Un gramme du premier lingot contenant 0,87 d'argent pur, 1245 grammes contiendront $0,87 \times 1245$ ou 1083,15. Un gramme du second lingot contenant 0,95 d'argent pur, x grammes en contiendront $0,95 \times x$. Mais le troisième lingot, pour être au titre 0,90 et peser $1245 + x$ grammes, devra contenir $0,90(1245 + x)$ d'argent pur. On a donc l'équation

$$1083,15 + 0,95x = 0,90(1245 + x).$$

Si l'on multiplie par 100 les deux membres, l'équation devient

$$108315 + 95x = 90(1245 + x),$$

ou

$$108315 + 95x = 112050 + 90x.$$

On en déduit

$$x = 747 \text{ grammes.}$$

18. Problème XIII. *D'après Vitruve, la couronne du roi Hiéron pesait* 7465 *grammes et perdait dans l'eau* 467 *grammes. On sait que l'or perd dans l'eau les* 52 *millièmes de son poids, que l'argent en perd les* 95 *millièmes. Déterminer*

les quantités d'or et d'argent qui entrent dans la composition de la couronne.

On raçonte que le roi Hiéron de Syracuse avait fait remettre à un orfévre une certaine quantité d'or pour en faire une couronne. Le travail achevé, la couronne avait bien le poids voulu; mais le roi, soupçonnant l'orfévre d'avoir gardé une partie de l'or et d'y avoir substitué un égal poids d'argent, consulta Archimède sur le moyen de découvrir la fraude sans endommager la couronne. Un jour qu'Archimède était aux bains, la solution du problème se présenta tout à coup à son esprit. On dit que, transporté de joie, il s'élança hors du bain, et, oubliant qu'il était nu, traversa les rues de Syracuse en criant : J'ai trouvé, j'ai trouvé (εὕρηκα, εὕρηκα).

Le moyen imaginé par Archimède repose sur ce principe de physique trouvé par lui, savoir, que tout corps plongé dans l'eau y perd une partie de son poids égal au poids du volume d'eau déplacé. Il consiste à déterminer par deux expériences préliminaires combien l'or, plongé dans l'eau, perd de son poids, et combien perd l'argent; puis à déterminer de la même manière combien perd la couronne plongée dans l'eau et à comparer le résultat aux précédents.

Un gramme d'or perdant 0,052 dans l'eau, 7465 grammes d'or perdent $0{,}052 \times 7465$ ou 388,18. Si la couronne était d'or pur, plongée dans l'eau, elle perdrait donc 388,18; mais elle perd 467 grammes; ceci annonce qu'il entre dans sa composition un métal, comme l'argent, moins dense que l'or.

Appelons x la quantité d'argent introduite par l'orfévre; la quantité d'or sera $7465 - x$. Un gramme d'argent perdant 0,095 dans l'eau, x grammes perdront $0{,}095\,x$. De même $7465 - x$ grammes d'or perdront $0{,}052\,(7465 - x)$. La perte éprouvée par les deux quantités d'or et d'argent

devant être égale à la perte 467 grammes éprouvée par la couronne (on suppose que l'alliage des deux métaux a lieu sans contraction ni dilatation), on a l'équation

$$0{,}095x + 0{,}052\,(7465 - x) = 467.$$

En faisant la multiplication indiquée par la parenthèse, cette équation devient

$$0{,}095x + 388{,}18 - 0{,}052x = 467,$$
$$0{,}043x = 78{,}82,$$

d'où l'on déduit

$$x = 1833 \text{ grammes.}$$

Ainsi l'orfévre avait substitué 1833 grammes d'argent à un égal poids d'or.

19. Jusqu'ici nous n'avons résolu que des problèmes à une inconnue. Nous allons donner quelques exemples de problèmes à plusieurs inconnues.

PROBLÈME XIV. *Pour payer ses ouvriers sur le pied de 3 francs chacun, il manque 8 francs à celui qui les fait travailler. Mais s'il ne leur donnait que 2 francs chacun, il lui resterait 3 francs. Quelle est la somme d'argent et le nombre des ouvriers?*

Désignons par x le nombre des ouvriers et par y la somme d'argent. Pour donner 3 francs à chacun, il faudrait $3x$ francs; mais comme il manque 8 francs, on a l'équation

$$y = 3x - 8.$$

Pour donner 2 francs à chacun, il faut $2x$ francs, et comme il reste 3 francs, on a l'équation

$$y = 2x + 3.$$

On a ainsi deux équations à deux inconnues.

Si, dans la seconde équation, nous remplaçons y par la

quantité égale $3x - 8$ donnée par la première, nous obtenons une équation à une seule inconnue

$$3x - 8 = 2x + 3;$$

de laquelle nous déduisons, en la résolvant par le procédé ordinaire

$$x = 11.$$

Une fois la valeur de x trouvée, on obtient celle de y en remplaçant x par sa valeur 11 dans l'une des deux premières équations, ce qui donne

$$y = 25.$$

Ainsi il y a 11 ouvriers, et la somme d'argent est 25 francs.

20. Problème XV. *Deux sources, qui coulent uniformément, ont rempli ensemble un réservoir de 18 mètres cubes, en coulant l'une pendant 7 heures, l'autre pendant 2 heures. Les deux mêmes sources ont rempli un second réservoir de 22 mètres cubes, la première coulant pendant 3 heures, la seconde pendant 5 heures. On demande quelle est la dépense de chacune de ces sources.*

Prenons pour unité de volume le mètre cube et appelons x et y les volumes d'eau que fournissent les deux sources par heure. La quantité d'eau versée par la première en 7 heures est $7x$, celle versée par la seconde en 2 heures est $2y$; le premier réservoir ayant été rempli de cette manière, on a l'équation

$$7x + 2y = 18.$$

De même $3x$ et $5y$ sont les quantités d'eau versées par les deux sources en 3 heures et en 5 heures; le second réservoir ayant été rempli de cette façon, on a la seconde équation

$$3x + 5y = 22.$$

Pour résoudre ces deux équations, tirons de la première la

valeur de y, comme si x était connue, ce qui donne

$$y = \frac{18 - 7x}{2},$$

et substituons cette valeur à la place de y dans la seconde équation, nous aurons l'équation

$$3x + 5\left(\frac{18 - 7x}{2}\right) = 22,$$

qui ne renferme plus qu'une seule inconnue x.

Si l'on multiplie par 5 le numérateur de la fraction, cette équation devient

$$3x + \frac{90 - 35x}{2} = 22;$$

en chassant le dénominateur et résolvant, on trouve

$$x = \frac{46}{29}.$$

Pour avoir ensuite la valeur de y, on remplacera x par sa valeur $\frac{46}{29}$ dans l'équation

$$y = \frac{18 - 7x}{2},$$

ce qui donne

$$y = \frac{100}{29}.$$

On vérifierait que les nombres fractionnaires $\frac{46}{29}$ et $\frac{100}{29}$, mis à la place de x et de y satisfont bien aux deux équations du problème. Si l'on réduit en décimales, on trouve que les deux sources dépensent par heure, la première 1586 litres, la seconde 3448 litres, en négligeant les fractions de litre.

Résolution de deux équations à deux inconnues.

21. Remarquons la méthode que nous avons suivie pour résoudre deux équations à deux inconnues. Nous avons tiré

de l'une des équations la valeur de l'une des inconnues, par exemple de y, comme si l'autre x était connue, et nous avons substitué cette valeur dans l'autre équation; nous avons obtenu de la sorte une équation à une seule inconnue x, que nous avons résolue par le procédé ordinaire.

Appliquons encore cette méthode à quelques exemples. Soient les deux équations

$$5x - 3y = 14,$$
$$7y + 6y = 40.$$

De la première, en faisant passer le terme $3y$ dans le second membre, le terme 14 dans le premier, et divisant par 3 on tire

$$y = \frac{5x - 14}{3}.$$

Susbtituons cette valeur à la place de y dans la seconde équation, nous aurons l'équation à une inconnue

$$7x + 6\,\frac{5x - 14}{3} = 40.$$

Ici le diviseur 3 disparaît, à cause du multiplicateur 6, et l'équation devient

$$7x + 2(5x - 14) = 40,$$

ou

$$7x + 10x - 28 = 40;$$

d'où

$$x = 4.$$

En portant cette valeur de x dans l'équation

$$y = \frac{5x - 14}{3},$$

on trouve

$$y = 2.$$

Vérification. Ces deux valeurs 4 et 2, mises à la place de x et de y, rendent les deux premiers membres des équations proposées égaux respectivement à 14 et à 40, et les équations sont satisfaites.

Soient encore les deux équations

$$13x - 9y = 17,$$
$$11x - 15y = 7.$$

De la première, résolue par rapport à y, nous tirons

$$y = \frac{13x - 17}{9}.$$

Si, afin d'éviter le signe — devant le terme en y dans la seconde équation, on fait passer ce terme dans le second membre, cette équation devient

$$11x = 7 + 15y;$$

en subtituant à la place de y sa valeur déduite de la première équation, on a

$$11x = 7 + \frac{15(13x - 17)}{9}.$$

On peut simplifier en divisant par 3 le numérateur et le dénominateur de la fraction, ce qui donne

$$11x = 7 + \frac{5(13x - 17)}{3},$$

ou

$$11x = 7 + \frac{65x - 85}{3}.$$

Multiplions par 3, l'équation devient

$$33x = 21 + 65x - 85;$$

d'où l'on tire

$$x = 2.$$

Cette valeur, portée dans l'équation

$$y=\frac{13x-17}{9},$$

donne

$$y=1.$$

Nous verrons plus tard que la précaution que nous avons prise de faire passer le terme $15y$ dans le second membre, afin d'éviter le signe —, n'est pas nécessaire.

22. Problème XVI. *On a formé trois mélanges de froment, de seigle et d'orge. Le premier contient* 10 *mesures de froment,* 30 *de seigle et* 20 *d'orge; il revient à* 230 *francs. Le second contient* 12 *mesures de froment,* 15 *de seigle, et* 6 *d'orge; il revient à* 138 *francs. Le troisième contient* 4 *mesures de froment,* 10 *de seigle et* 5 *d'orge, et revient à* 75 *francs. Quel est le prix de la mesure de froment, de seigle et d'orge?*

Appelons x, y, z le prix d'une mesure de chaque denrée. Une mesure de froment valant x francs, 10 mesures vaudront 10 fois plus, c'est-à-dire $10x$; ainsi la quantité de froment contenue dans le premier mélange coûtera $10x$; de même la quantité de seigle coûtera $30y$, la quantité d'orge $20z$; comme le mélange coûte 230 francs, on a l'équation

$$10x+30y+20z=230.$$

On obtiendra de même les équations

$$\begin{aligned}12x+15y+6z&=138,\\4x+10y+5z&=75.\end{aligned}$$

Nous remarquons d'abord que l'on peut simplifier la première équation en divisant tous ses termes par 10, et la seconde en divisant tous ses termes par 3, de sorte que ces trois équations s'écrivent

$$\begin{aligned}x+3y+2z&=23,\\4x+5y+2z&=46,\\4x+10y+5z&=75.\end{aligned}$$

Il s'agit de résoudre ces trois équations à trois inconnues. La méthode est la même que celle que nous avons suivie pour deux équations à deux inconnues. De la première équation résolue par rapport à x, comme si l'on connaissait y et z, on tire

$$x = 23 - 3y - 2z.$$

Si nous mettons à la place de x cette valeur dans les deux autres équations, nous obtiendrons deux équations à deux inconnues

$$4(23 - 3y - 2z) + 5y + 2z = 46,$$
$$4(23 - 3y - 2z) + 10y + 5z = 75.$$

Ces équations, simplifiées, s'écrivent

$$7y + 6z = 46,$$
$$2y + 3z = 17.$$

De la dernière, nous tirons

$$z = \frac{17 - 2y}{3};$$

substituant dans la précédente, nous avons une équation à une inconnue

$$7y + 6\,\frac{17 - 2y}{3} = 46,$$

plus simplement

$$7y + 2(17 - 2y) = 46;$$

d'où

$$y = 4.$$

En portant cette valeur de y dans l'équation

$$z = \frac{17 - 2y}{3},$$

on trouve

$$z = 3.$$

En portant ces valeurs de y et de z dans l'équation

$$x = 23 - 3y - 2z,$$

on trouve enfin

$$x = 5.$$

Ainsi la mesure de froment coûte 5 francs, celle de seigle 4 francs, celle d'orge 3 francs.

Emploi des lettres comme moyen de généralisation.

23. Nous avons expliqué la formation d'une écriture abrégée qui facilite beaucoup le raisonnement et qui constitue, en quelque sorte, la langue des mathématiques. Elle présente un autre avantage non moins important, qui est de généraliser la résolution des problèmes. Il suffit, pour cela, de représenter par des lettres, non-seulement les quantités inconnues, mais encore les quantités connues, et nous avons déjà dit qu'afin d'éviter la confusion on se sert des premières lettres de l'alphabet pour les quantités connues, des dernières pour les quantités inconnues. De cette manière les raisonnements porteront non plus sur des nombres particuliers, mais sur des quantités quelconques, et l'on résoudra ainsi, à la fois, toutes les questions de même espèce. Quelques exemples feront bien comprendre cette nouvelle propriété de l'algèbre.

24. Reprenons le problème I. Partager 50 francs entre trois personnes, de manière que la première ait 6 francs de plus que la seconde, la seconde 4 francs de plus que la troisième.

Nommant x la troisième part, nous avons dit que les deux autres parts sont exprimées par $x+4$ et $x+4+6$; écrivant que la somme des trois parts est égale à 50, nous avons obtenu l'équation

$$3x + 14 = 50,$$

que nous avons résolue, et d'où nous avons déduit

$$x = 12.$$

Si l'on change les nombres qui entrent dans l'énoncé du problème, si l'on demande, par exemple, de partager 64 francs entre trois personnes, de manière que la première ait 5 francs de plus que la seconde, la seconde 7 francs de plus que la troisième, il est clair qu'il faudra recommencer exactement les mêmes raisonnements.

Ainsi, nommant la troisième part . . . . . x,
la seconde sera . . . . $x + 7$,
la première . . . . $x + 7 + 5$.

Écrivant que la somme de trois parts est égale au nombre à partager 64, on aura l'équation

$$3x + 19 = 64,$$

que l'on résoudra de la même manière, et d'où l'on déduira

$$x = 15.$$

On a dû naturellement se demander si l'on ne pourrait pas résoudre à la fois toutes les questions de ce genre, de manière qu'on ne fût pas obligé de recommencer les mêmes raisonnements dans chaque exemple particulier. Or ceci est bien facile. Représentons par la lettre a la somme à partager, par b l'excès de la première part sur la seconde, par c l'excès de la seconde sur la troisième et raisonnons sur ces lettres comme sur des nombres donnés.

Nommant la troisième part . . . . x,
la seconde sera . . . . $x + c$,
la première . . . . $x + c + b$.

Écrivant que la somme des trois parts est égale au nombre à partager a, nous aurons l'équation

$$3x + 2c + b = a.$$

Retranchons des deux membres les quantités b et $2c$, l'équation devient

$$3x = a - b - 2c;$$

divisant par 3, nous trouvons

$$x = \frac{a - b - 2c}{3}.$$

C'est là ce qu'on appelle une *formule*. Elle indique quelles opérations il faut effectuer sur les quantités connues pour en déduire la valeur de l'inconnue. Cette formule dit que pour trouver la troisième part, il faut, du nombre à partager a, retrancher l'excès b de la première part sur la seconde et deux fois l'excès c de la seconde sur la troisième, puis diviser le résultat par 3.

Quand on veut appliquer à un exemple, on remplace dans la formule les lettres par leurs valeurs particulières et l'on effectue les calculs. Ainsi, dans le premier exemple, on fera $a = 50$, $b = 6$, $c = 4$; la formule donne

$$x = \frac{50 - 6 - 4 \times 2}{3};$$

d'où, en effectuant les calculs,

$$x = 12.$$

C'est bien la valeur trouvée directement.

25. Généralisons de la même manière le problème VIII, et pour cela représentons par a la distance des deux villes, par b la vitesse du premier courrier, c'est-à-dire le nombre de lieues qu'il parcourt en une heure, par c la vitesse du second. Nous prendrons encore pour inconnue le temps pendant lequel marchent les deux courriers jusqu'à leur rencontre. Nommons x ce temps. Le premier courrier, faisant b lieues à l'heure, parcourra en x heures bx lieues; le second, faisant c lieues à l'heure, parcourra, dans le même temps, cx lieues. Mais la somme des chemins parcourus par les deux courriers doit être égale à la distance totale a lieues. Nous avons donc l'équation

$$bx + cx = a;$$

que l'on peut écrire

$$(b + c)x = a,$$

la parenthèse indiquant que la quantité $b + c$ est multipliée par x. En divisant les deux membres de l'équation par $b + c$, on a

$$x = \frac{a}{b + c}.$$

Cette formule dit que, pour trouver après combien d'heures a lieu la rencontre, il faut diviser la distance des deux points de départ par la somme des chemins que parcourent les deux courriers en une heure.

On appliquera à l'exemple considéré, en faisant $a = 100$, $b = 3$, $c = 2$, ce qui donne

$$x = \frac{100}{3 + 2} = \frac{100}{5} = 20.$$

26. Généralisons encore le problème VII, que nous poserons ainsi : l'âge d'un père est a années, l'âge du fils b. Dans combien de temps l'âge du père sera-t-il n fois l'âge du fils?

Désignons par x le nombre d'années cherché. Après ce temps l'âge du père sera $a + x$, l'âge du fils $b + x$. Comme l'âge du père doit être n fois l'âge du fils, on a l'équation

$$a + x = (b + x) \times n,$$

ou

$$a + x = nb + nx.$$

Par la transposition des termes, cette équation devient

$$a - nb = nx - x,$$

ou

$$a - nb = x \times (n - 1);$$

d'où l'on déduit

$$x = \frac{a - nb}{n - 1}.$$

Si l'on applique à l'exemple considéré, on fera $a = 40$,

$b=10, n=3$; la formule donne

$$x=\frac{40-10\times 3}{3-1}=\frac{40-30}{2}=5.$$

27. Cette introduction suffit, je pense, pour faire comprendre au lecteur le but de l'algèbre, et lui donner une idée de la méthode à laquelle les mathématiciens ont donné le nom d'*analyse*. Elle offre d'ailleurs l'avantage de mettre les commençants en état de résoudre immédiatement un grand nombre de questions ; nous en proposons ici quelques-unes comme exercices. Nous allons maintenant revenir sur nos pas et exposer en détail et avec ordre le mécanisme du calcul algébrique.

Exercices.

PROBLÈME I. Trois personnes ont ensemble 112 ans; la deuxième a 8 ans de plus que la plus jeune; la troisième a autant que les deux autres. Quel est l'âge de chacune d'elles?

Réponse. La plus jeune a 24 ans, la deuxième 32, la troisième 56.

PROBLÈME II. Faire 53 francs avec 16 pièces de 2 et de 5 francs.

Réponse. On prendra 9 pièces de 2 francs et 7 de 5 francs.

PROBLÈME III. Un homme, en arrivant à Paris, a dépensé le premier jour le $\frac{1}{2}$ de son argent, le second jour le $\frac{1}{4}$ du reste; il n'a plus alors que 48 francs. Combien avait-il d'argent?

Réponse. 120 francs.

PROBLÈME IV. Quelle est la fraction telle que, si l'on ajoute 1 à son numérateur, elle devienne égale à $\frac{1}{3}$ et si l'on ajoute 1 à son dénominateur, elle devient égale à $\frac{1}{4}$?

Réponse. $\frac{4}{15}$.

PROBLÈME V. Un bassin est alimenté par deux tuyaux de conduite. Dans une première expérience, le premier ayant été ouvert pendant 4 heures, le second pendant 5 heures, on a obtenu 40 mètres cubes d'eau. Dans une seconde expérience, le premier ayant été ouvert pendant 6 heures, le second pendant 3 heures et demie, on a obtenu 50 mètres cubes. Quelle est la quantité d'eau que chaque tuyau fournit en une heure?

Réponse. Le premier tuyau dépense 6875 litres d'eau par heure, le second 2500.

PROBLÈME VI. Une personne a des jetons dans ses deux mains; si elle en passe un de la droite dans la gauche, il y en a autant dans les deux mains;

mais si elle en passe un de la gauche dans la droite, celle-ci en contient le double.

Réponse. La main droite contient 7 jetons, la gauche 5.

PROBLÈME VII. Une personne a décidé dans son testament que sa fortune serait distribuée entre quatre personnes, de manière que la deuxième ait deux fois autant que la première, la troisième autant que les deux premières et la quatrième autant que la deuxième et la troisième. La fortune totale s'élève à 11000 francs. Quelle est la part de chacune d'elles?

Réponse. La première aura 1000 francs, la deuxième 2000, la troisième 3000 et la quatrième 5000.

PROBLÈME VIII. Trouver le nombre dont le double ajouté à 24 surpasse 80 autant que 100 surpasse ce nombre.

Réponse. 52.

PROBLÈME IX. Partager 75 en deux parties telles, que 3 fois la plus grande surpasse 7 fois la plus petite de 15.

Réponse. Ces deux parties sont 54 et 21.

PROBLÈME X. De deux tonneaux égaux, après avoir tiré de l'un 45 litres et de l'autre 150, il reste deux fois plus de vin dans le premier que dans le second. Combien chaque tonneau contenait-il de litres?

Réponse. 255 litres.

PROBLÈME XI. Un maître, ayant proposé 12 problèmes à son élève, convient de lui donner 25 centimes pour chaque problème résolu, à la condition que l'élève payera 10 centimes pour chaque problème non résolu. Le compte fait, le maître doit à l'élève 1 franc 25 centimes. Combien celui-ci a-t-il résolu de problèmes?

Réponse. L'élève a résolu 7 problèmes.

LIVRE PREMIER.

CALCUL ALGÉBRIQUE.

CHAPITRE PREMIER.

PRÉLIMINAIRES.

Définitions.

28. Toute expression algébrique indique une série d'opérations à effectuer sur des quantités représentées par des lettres. L'expression est un *polynôme* si elle est composée de plusieurs parties séparées les unes des autres par le signe + ou par le signe —. Ces diverses parties sont les *termes* du polynôme. Dans le cas contraire, c'est un *monôme.*

On donne spécialement le nom de *binôme* à tout polynôme composé de deux termes, celui de *trinôme* à tout polynôme composé de trois termes, etc.

Ainsi les expressions

$$5a^3b^2c, \quad \frac{4a^2-3b^2}{a+b}, \quad \sqrt{a^2+b^2},$$

sont des monômes.

Les expressions

$$3a^2 - 5ab, \quad a + 4\sqrt{ab}, \quad 7a - \frac{a^2+b^2}{a-b},$$

sont des binômes.

Les expressions

$$a^2 - 2ab + 3b^2, \quad 2a + 3\sqrt{ab} - 5b,$$

sont des trinômes.

L'expression

$$a^4 - 3a^3b + 5a^2b^2 - 7ab^3 - 2b^4,$$

est un polynôme à cinq termes.

29. Une expression algébrique qui ne contient pas le signe $\sqrt{}$ est dite *rationnelle;* par opposition, elle est dite *irrationnelle* si elle contient le signe $\sqrt{}$.

L'expression

$$\frac{4a^2 - 3b^2}{a+b}$$

est rationnelle; mais l'expression

$$a + \sqrt{ab}$$

est irrationnelle.

30. Une expression rationnelle est *entière* si elle ne contient pas le signe de la division; elle est *fractionnaire* si elle le contient.

L'expression

$$a^2 - 2ab + b^2$$

est un polynôme entier.

L'expression

$$a + \frac{a^2 - b^2}{2c} - 4b$$

est fractionnaire.

31. Tout monôme entier est de la forme

$$7a^3b^2c.$$

Il faut distinguer dans ce monôme les lettres a, b, c qui le constituent, les exposants 3, 2, 1 dont ces lettres sont affectées (la lettre c, qui n'a pas d'exposant, est censée affectée de l'exposant 1; et, en effet, la quantité c est la première puissance de c) et le multiplicateur 7 placé au commencement. Ce multiplicateur porte spécialement le nom de *coefficient*, il indique que la quantité a^3b^2c est répétée 7 fois.

Le monôme

$$a^3b^2c,$$

qui n'a pas de coefficient, est censé avoir le coefficient 1; en effet, on a ici *une fois* la quantité a^3b^2c.

32. On appelle *degré* d'un monôme entier par rapport à une lettre l'exposant de cette lettre; degré par rapport à plusieurs lettres la somme des exposants de ces lettres.

Ainsi le monôme

$$7a^3b^2c$$

est du troisième degré par rapport à a, du second degré par rapport à b, du premier degré par rapport à c. Il est du cinquième degré par rapport aux deux lettres a et b, du sixième degré par rapport aux trois lettres a, b, c.

On appelle degré d'un polynôme par rapport à une lettre le degré du terme dans lequel cette lettre est affectée du plus fort exposant. Ainsi le polynôme

$$5x^3 - 4x^2 + 3x - 6$$

est du troisième degré par rapport à x.

Lorsque tous les termes d'un polynôme sont du même degré par rapport aux différentes lettres qu'il renferme, on dit qu'il est *homogène*. Ainsi le polynôme

$$2a^3 - 5a^2b + 4ab^2 - 6b^3$$

3

est homogène et du troisième degré, parce que tous ses termes sont du troisième degré par rapport aux deux lettres a et b qui entrent dans ce polynôme.

Un terme qui ne contient pas une lettre est regardé comme étant du degré 0 par rapport à cette lettre. Ainsi le premier terme $2a^3$, qui ne contient pas la lettre b, sera du degré 0 par rapport à b. Le dernier, qui ne contient pas la lettre a, sera du degré 0 par rapport à a; de cette façon, on peut dire que dans tous les termes la somme des exposants égale 3.

Polynôme.

33. Un polynôme indique une série d'additions et de soustractions à effectuer.

Ainsi le polynôme

$$a + b - c + d - e - f$$

indique qu'il faut ajouter la quantité a, puis la quantité b, ensuite retrancher c, ajouter d, retrancher e et encore f.

Les termes affectés du signe $+$ sont dits *positifs;* les termes affectés du signe $-$ sont dits *négatifs.* Le terme a, qui, placé au commencement, n'a pas de signe, est positif, et doit être considéré comme affecté du signe $+$.

Il est évident que la *série des opérations indiquées par un polynôme revient à ajouter la somme des termes positifs et à retrancher la somme des termes négatifs.*

Pour éclaircir ceci par un exemple, supposons que le polynôme représente les opérations d'un négociant dans le courant de la journée, les termes positifs étant les recettes, les termes négatifs les dépenses. Au commencement de la journée, le négociant avait en caisse une certaine somme d'argent; il a fait d'abord une recette a et une seconde recette b; puis il a payé c; après quoi il a reçu d, il

a payé e et encore f. Il est évident qu'à la fin de la journée son avoir a été augmenté de la somme des recettes et diminué de la somme des dépenses.

Soit le polynôme numérique

$$12 + 7 - 15 + 20 - 6 - 2.$$

La somme des termes positifs est 39, celle des termes négatifs 23. Il faut ajouter 39 et retrancher 23, ce qui revient à ajouter 16, excès de la première somme sur la seconde. Dans ce cas, la valeur du polynôme est positive; on l'écrit $+16$.

Lorsque la somme des termes négatifs l'emporte sur celle des termes positifs, le polynôme n'en conserve pas moins une signification très-nette. Soit le polynôme

$$5 - 3 + 7 - 10 + 4 - 9.$$

Il faut ajouter 16, somme des termes positifs, et retrancher 22, somme des termes négatifs; ce qui revient à retrancher 6, excès de la seconde somme sur la première. Dans ce cas, la valeur du polynôme est négative; on l'écrit -6.

Deux polynômes, et en général deux expressions algébriques, sont égales, lorsqu'elles ont la même valeur affectée du même signe.

34. Il résulte clairement de ce qui précède que l'*on peut changer à volonté l'ordre des termes d'un polynôme.* Car, quel que soit l'ordre des termes, on a toujours finalement la même somme à ajouter et la même somme à retrancher.

Ainsi les termes du polynôme

$$a + b - c + d - e - f$$

peuvent être écrits dans tel ordre qu'on voudra, par exemple

dans l'ordre suivant

$$-e+d-f+a-c+b.$$

Il n'y a aucun inconvénient à commencer par un terme négatif. Pour revenir à notre comparaison, cela signifie que le négociant commence par payer e, qu'il reçoit ensuite d, qu'il paye f, etc. Or rien n'empêche de supposer que le négociant a dans sa caisse, au commencement de la journée, une assez grande somme d'argent pour effectuer les payements.

Termes semblables.

35. On dit que deux termes sont *semblables* lorsqu'ils sont composés des mêmes lettres affectées des mêmes exposants, et qu'ils ne diffèrent que par les coefficients et les signes.

Soit le polynôme

$$5a^3-4a^2b+7ab^2+a^2b-2a^3-8ab^2+a^3-12ab^2+3a^2b.$$

Nous voyons d'abord les trois termes semblables

$$5a^3-2a^3+a^3,$$

que l'on peut réduire et remplacer par le seul terme $+4a^3$. En effet, la quantité a^3 doit être ajoutée 5 fois et encore 1 fois, c'est-à-dire 6 fois, et retranchée 2 fois, ce qui revient à l'ajouter 4 fois.

Nous trouvons ensuite les termes semblables

$$-4a^2b+a^2b+3a^2b$$

qui se détruisent. Car la quantité a^2b doit être ajoutée 3 fois et encore 1 fois, c'est-à-dire 4 fois, et retranchée 4 fois.

Il reste les termes semblables

$$+7ab^2-8ab^2-12ab^2,$$

qui se réduisent à $-13ab^2$. Car la quantité ab^2 doit être ajoutée 7 fois et retranchée 8 fois et encore 12 fois, c'est-à-dire 20 fois, ce qui revient à la retrancher 13 fois.

Ainsi le polynôme proposé s'écrit plus simplement

$$4a^3 - 13ab^2.$$

Dans la pratique, on opère très-rapidement cette réduction des termes semblables. Soient les termes semblables

$$+7ab^2 - 8ab^2 - 12ab^2;$$

faisant abstraction de la quantité ab^2, on ne considère que les coefficients et les signes

$$+7 - 8 - 12,$$

et l'on calcule la valeur -13 de ce polynôme numérique; puis on écrit $-13ab^2$ au résultat, et l'on barre les termes réduits.

Ordonner un polynôme.

36. Après avoir réduit les termes semblables, on a coutume d'ordonner le polynôme, soit par rapport aux puissances décroissantes d'une même lettre, soit par rapport aux puissances croissantes, c'est-à-dire que l'on écrit les termes dans un ordre tel que les exposants de cette lettre aillent, soit en diminuant, soit en augmentant.

Ainsi le polynôme

$$5x^3 - 4x^2 + 3x - 6$$

est ordonné par rapport aux puissances décroissantes de x. Ce même polynôme, écrit en ordre inverse,

$$-6 + 3x - 4x^2 + 5x^3,$$

sera ordonné par rapport aux puissances croissantes. Le

terme -6, qui ne contient pas la lettre x, sera regardé comme étant du degré 0.

Quand un polynôme contient des termes de tous les degrés, à partir du degré le plus élevé, on dit qu'il est *complet*. Le polynôme étant supposé ordonné par rapport aux puissances croissantes, la série des exposants commence à zéro, et s'élève jusqu'au degré du polynôme inclusivement. Il y a donc autant de termes qu'il y a d'unités dans le degré plus un. Ainsi le polynôme précédent est un polynôme complet du troisième degré, et il renferme quatre termes.

Lorsqu'un polynôme, contenant deux lettres, est homogène, si on l'ordonne par rapport aux puissances décroissantes de l'une d'elles, il sera en même temps ordonné par rapport aux puissances croissantes de l'autre ; car, la somme des exposants des deux lettres étant la même dans tous les termes, si les exposants de l'une d'elles vont en diminuant, ceux de l'autre iront nécessairement en augmentant. Ainsi le polynôme homogène

$$2a^3 - 5a^2b + 4ab^2 - 6b^3,$$

qui a été ordonné par rapport aux puissances décroissantes de a, se trouve en même temps ordonné par rapport aux puissances croissantes de b.

CHAPITRE II.

ADDITION ET SOUSTRACTION.

Addition.

37. Proposons-nous d'ajouter à un premier polynôme un second polynôme ; nous supposons que ce second polynôme ait une valeur positive, c'est-à-dire que la somme des termes positifs l'emporte sur celle des termes négatifs. Ajouter ce polynôme, c'est ajouter sa valeur, en d'autres termes, c'est ajouter l'excès de la somme de ses termes positifs sur la somme des termes négatifs. Mais ajouter cette différence revient évidemment à ajouter les termes positifs et retrancher les termes négatifs, ce qui se fera en écrivant à la suite du premier polynôme tous les termes du second, chacun avec son signe. Ainsi :

RÈGLE. *A un polynôme on en ajoute un autre, en écrivant à la suite du premier successivement tous les termes du second, chacun avec son signe.*

EXEMPLE. Additionnez les polynômes

$$3a^4 - 5a^3b + 7a^2b^2 + 4ab^3 - b^4$$
$$-2a^4 - 3a^3b + 8a^2b^2 - 7ab^3 + 2b^4,$$
$$6a^4 - 2a^3b - 15a^2b^2 + 6ab^3 - 2b^4.$$

Imaginons que l'on ait écrit tous les termes de ces trois polynômes, les uns à la suite des autres, chacun avec son signe, en affectant du signe + le premier terme $6a^4$ du

troisième polynôme ; réduisons les termes semblables, nous obtiendrons le polynôme

$$7a^4 - 10a^3b + 3ab^3 - b^4.$$

38. Remarque. On peut grouper dans une parenthèse plusieurs termes d'un polynôme, en conservant à chaque terme son signe et mettant le signe $+$ devant la parenthèse.

Par exemple, le polynôme

$$a - b + c - d - e + f$$

peut être écrit sous la forme

$$a - b + (c - d - e + f).$$

En effet, la parenthèse, précédée du signe $+$, indique l'addition du polynôme ; si l'on effectue cette addition d'après la règle énoncée, on reproduit évidemment le polynôme proposé.

Il n'y a pas à s'inquiéter de savoir si, parmi les termes mis entre parenthèses, la somme des termes positifs est plus grande que celle des termes négatifs, pourvu que l'on étende aux polynômes négatifs la règle démontrée pour l'addition des polynômes positifs.

Ainsi nous dirons qu'ajouter un polynôme quelconque, c'est écrire tous ses termes, chacun avec son signe.

39. Il convient aussi d'appliquer la même règle à un terme pris isolément, et nous dirons qu'ajouter une quantité affectée du signe $+$ ou du signe $-$, c'est l'écrire avec son signe. Soit, par exemple, le polynôme

$$15 - 3 + 6 - 9 - 4 + 2.$$

Si nous mettons les quatre derniers termes entre parenthèses, nous écrirons ce polynôme sous la forme

$$15 - 3 + (6 - 9 - 4 + 2).$$

La partie mise entre parenthèses est négative : mais ceci n'offre aucun inconvénient, puisqu'en effectuant l'addition d'après la règle énoncée, on reproduit le polynôme proposé. Remplaçons maintenant le polynôme entre parenthèses par sa valeur — 5 ; il s'agit d'ajouter — 5 ; pour cela nous écrirons — 5, ce qui donne

$$15 - 3 - 5.$$

Et, en effet, dans le polynôme proposé, la partie

$$+ 6 - 9 - 4 + 2,$$

mise entre parenthèses, signifie qu'il faut ajouter 8 et retrancher 13, c'est-à-dire retrancher 5.

40. D'après cette manière de voir, l'*addition algébrique* ne comporte plus nécessairement l'idée d'augmentation. Si l'on ajoute une quantité positive, il y a effectivement augmentation ; mais si l'on ajoute une quantité négative, il y a au contraire diminution. Ajouter — 5, c'est en réalité retrancher 5.

Il résulte de là que l'on peut considérer un polynôme comme étant la *somme algébrique* de tous ses termes, puisque l'addition consiste à les écrire les uns à la suite des autres, chacun avec son signe. Cette manière d'envisager les polynômes est très-utile dans les applications.

Soustraction.

41. La soustraction est l'opération inverse de l'addition. D'une quantité en retrancher une autre, c'est en trouver une troisième telle qu'en y ajoutant la seconde on reproduise la première.

Supposons que du polynôme

$$a - b + c$$

on veuille retrancher le polynôme

$$d - e - f + g.$$

Je dis qu'on obtiendra le résultat demandé en écrivant à la suite du premier polynôme tous les termes du second, chacun avec un signe contraire, ce qui donne

$$a - b + c - d + e + f - g.$$

En effet, si à ce troisième polynôme, nous ajoutons le second, nous avons

$$a - b + c - d + e + f - g + d - e - f + g,$$

ou, simplement,

$$a - b + c,$$

en remarquant que les termes $-d$ et $+d$ se détruisent, de même que les termes $+e$ et $-e$, etc. C'est précisément le premier polynôme. Ainsi :

Règle. *Pour retrancher d'un polynôme un autre polynôme, on écrit à la suite du premier successivement tous les termes du second, en changeant le signe de chacun d'eux.*

Exemple. Du polynôme

$$5a^3 - 4a^2b - 6ab^2 + b^3,$$

retrancher le polynôme

$$a^3 - 7a^2b + 2ab^2 - 5b^3.$$

Écrivons à la suite du premier polynôme tous les termes du second, en changeant les signes, nous aurons

$$5a^3 - 4a^2b - 6ab^2 + b^3 - a^3 + 7a^2b - 2ab^2 + 5b^3,$$

et, en réduisant les termes semblables,

$$4a^3 + 3a^2b - 8ab^2 + 6b^3.$$

42. Remarque. On peut grouper, dans une parenthèse, précédée du signe —, plusieurs termes d'un polynôme, en

ayant soin de changer les signes de tous les termes que l'on met dans la parenthèse.

Par exemple, le polynôme

$$a + b - c + d - e + f - g$$

peut être écrit sous la forme

$$a + b - (c - d + e - f + g).$$

En effet, la parenthèse, précédée du signe —, indique la soustraction d'un polynôme; or, si l'on effectue cette soustraction d'après la règle énoncée, on reproduit évidemment le polynôme proposé.

Il n'y a pas à s'inquiéter de savoir si, parmi les termes mis entre parenthèses, la somme des termes positifs est plus grande ou plus petite que la somme des termes négatifs; car la règle de l'addition ayant été établie d'une manière générale, celle de la soustraction, qui s'en déduit, a le même degré de généralité; elle est vraie dans tous les cas, que la valeur du polynôme soit positive ou négative, qu'il comprenne un seul terme ou plusieurs. Ainsi, retrancher une quantité affectée d'un certain signe, c'est l'écrire avec un signe contraire.

Soit, par exemple, le polynôme

$$3 - 5 - 4 + 9 - 6 + 8.$$

Si nous mettons dans une parenthèse, précédée du signe —, les quatre derniers termes, en changeant leurs signes, nous écrirons ce polynôme sous la forme

$$3 - 5 - (4 - 9 + 6 - 8).$$

La partie mise entre parenthèses est négative, mais ceci n'offre aucun inconvénient, puisqu'en effectuant la soustraction d'après la règle énoncée, on reproduit le polynôme proposé. Si nous remplaçons le polynôme entre parenthèses

par sa valeur — 7, nous avons à retrancher — 7, ce qui se fait en changeant le signe de cette quantité, c'est-à-dire en écrivant + 7 ; nous aurons donc

$$3 - 5 + 7.$$

Et, en effet, dans le polynôme proposé, la partie

$$-4 + 9 - 6 + 8,$$

mise entre parenthèses, signifie qu'il faut ajouter 17 et retrancher 10, c'est-à-dire ajouter 7.

43. De même que l'addition algébrique ne comporte plus nécessairement l'idée d'augmentation, la *soustraction algébrique* ne comporte plus nécessairement l'idée de diminution. Si l'on retranche une quantité positive, il y a effectivement diminution ; mais si l'on retranche une quantité négative, il y a au contraire augmentation. Retrancher — 7, c'est en réalité ajouter 7.

En résumé, si l'on considère les quantités comme affectées des signes + ou —, l'addition consiste à les écrire avec leurs signes, la soustraction à les écrire avec des signes contraires.

CHAPITRE III.

MULTIPLICATION.

Je rappelle d'abord quelques principes qui nous seront utiles. On sait que, dans un produit de plusieurs facteurs, on peut changer l'ordre des facteurs et les grouper à volonté sans changer la valeur du produit. On sait aussi que multiplier une quantité par un produit de plusieurs facteurs revient à multiplier cette quantité successivement par chacun des facteurs. Ces principes ont été démontrés en arithmétique pour des nombres quelconques, entiers ou fractionnaires; on peut donc les appliquer en algèbre, où les lettres représentent des nombres quelconques.

Multiplication de deux puissances d'un même nombre.

44. Soit à multiplier a^m par a^n. Multiplier par a^n revient à multiplier successivement par n facteurs égaux à a, puisque a^n désigne le produit de n facteurs égaux à a; d'autre part, a^m désigne le produit de m facteurs égaux à a; on a donc le produit de $m+n$ facteurs égaux à a, ce qu'on écrit a^{m+n}. Ainsi,

$$a^m \times a^n = a^{m+n}.$$

Par exemple,

$$a^4 \times a^3 = a^7.$$

RÈGLE. *On multiplie des puissances d'un même nombre en ajoutant les exposants.*

Une lettre qui n'a pas d'exposant est censée affectée de l'exposant 1. Ainsi,

$$a^4 \times a = a^5.$$

Multiplication de deux monômes entiers.

45. Soit à faire le produit des monômes $4a^3b^2c^4d$ et $3a^2bc^3e^4$. Chacun de ces monômes exprime un produit de plusieurs facteurs ; pour multiplier le premier produit par le second, il suffit de le multiplier successivement par chacun des facteurs du second, ce qui donne pour le produit demandé

$$4\times a^3\times b^2\times c^4\times d\times 3\times a^2\times b\times c^3\times e^4.$$

Si l'on groupe les facteurs de la manière suivante

$$4\times 3\times (a^3\times a^2)\times (b^2\times b)\times (c^4\times c^3)\times d\times e^4;$$

et si l'on effectue les produits indiqués dans les parenthèses, on a

$$12\times a^5\times b^3\times c^7\times d\times e^4,$$

ce qui s'écrit plus simplement

$$12a^5b^3c^7de^4.$$

Ainsi

$$4a^3b^2c^4d\times 3a^2bc^3e^4 = 12a^5b^3c^7de^4.$$

RÈGLE. *Pour multiplier deux monômes entiers, on multiplie les coefficients, on ajoute les exposants des mêmes lettres, et l'on écrit avec leurs exposants les lettres différentes.*

Multiplication d'un polynôme par un monôme.

46. La valeur d'un monôme étant un nombre, entier ou fractionnaire, il s'agit de multiplier un polynôme par un nombre quelconque.

1° Proposons-nous d'abord de multiplier un polynôme

$$a-b+c-d$$

par un nombre entier m. Il faut répéter le polynôme m fois,

c'est-à-dire additionner m polynômes égaux au polynôme multiplicande. Or, si l'on fait cette addition, on voit que chaque terme du multiplicande sera répété m fois avec son signe; en réduisant, on aura donc

$$ma - mb + mc - md.$$

Chaque terme du multiplicande sera donc multiplié séparément par le nombre entier.

2° Soit maintenant à diviser le polynôme

$$a - b + c - d$$

par un nombre entier n. Il faut trouver un polynôme qui, multiplié par n, reproduise le polynôme dividende. Le quotient cherché sera

$$\frac{a}{n} - \frac{b}{n} + \frac{c}{n} - \frac{d}{n};$$

car, si l'on multiplie ce polynôme par n, ce que l'on fait en multipliant chaque terme séparément par n, comme nous l'avons vu, on reproduit le polynôme proposé.

3° Il est aisé maintenant de multiplier le polynôme

$$a - b + c - d$$

par un nombre fractionnaire $\frac{m}{n}$. Multiplier par une fraction $\frac{m}{n}$, c'est répéter m fois la n^e partie du multiplicande; en d'autres termes, c'est diviser le multiplicande par n et multiplier le résultat par m.

Divisons d'abord le multiplicande par le nombre entier n; nous avons

$$\frac{a}{n} - \frac{b}{n} + \frac{c}{n} - \frac{d}{n};$$

pour multiplier ce résultat par le nombre entier m, il suffit de multiplier chaque terme par m, ce qui donne

$$\frac{ma}{n} - \frac{mb}{n} + \frac{mc}{n} - \frac{md}{n};$$

ou

$$\frac{m}{n}a-\frac{m}{n}b+\frac{m}{n}c-\frac{m}{n}d.$$

Mais le multiplicateur $\frac{m}{n}$ est un nombre quelconque que nous pouvons représenter par la lettre e, et nous avons alors

$$(a-b+c-d)\times e=ae-be+ce-de.$$

RÈGLE. Ainsi, *on multiplie un polynôme par un nombre quelconque, en multipliant chaque terme séparément par ce nombre, et donnant à chaque terme du produit le signe du terme correspondant du multiplicande.*

Multiplication d'un polynôme par un polynôme.

47. Il est évident que le produit d'une quantité quelconque par la somme de plusieurs nombres est égal à la somme des produits de cette quantité par chacun d'eux. Par exemple, 8 fois une quantité égale 5 fois cette quantité, plus 3 fois cette même quantité. Si donc le polynôme multiplicateur a tous ses termes positifs, il suffira de multiplier le multiplicande par chacun d'eux séparément et d'ajouter les résultats.

Il est évident aussi que le produit d'une quantité quelconque par la différence de deux nombres est égal à la différence des produits de cette quantité par chacun d'eux. Par exemple, 5 fois une quantité égale 8 fois cette quantité, moins 3 fois cette même quantité. Supposons maintenant que le polynôme multiplicateur ait des termes positifs et des termes négatifs, et que la somme des termes positifs l'emporte sur la somme des termes négatifs; la valeur du polynôme multiplicateur est l'excès de la première somme sur la seconde; le produit du multiplicande par cette différence égale donc la différence des produits obtenus en mul-

tipliant le multiplicande par chacune de ces deux sommes. Ceci revient à multiplier le multiplicande par chacun des termes du multiplicateur, à ajouter les produits partiels fournis par les termes positifs du multiplicateur et à retrancher les produits partiels fournis par les termes négatifs. Ainsi,

RÈGLE. ***Pour multiplier un polynôme par un polynôme, on multiplie tous les termes du multiplicande successivement par chacun des termes du multiplicateur; on écrit avec leurs signes les produits partiels fournis par les termes positifs du multiplicateur, et avec des signes contraires les produits fournis par les termes négatifs.***

Règle des signes.

48. Soit à multiplier le polynôme

$$a - b + c - d$$

par le polynôme

$$e - f + g - h.$$

Le produit demandé sera

$$+ (ae - be + ce - de) - (af - bf + cf - df)$$
$$+ (ag - bg + cg - dg) - (ah - bh + ch - dh),$$

ou, en effectuant les additions et les soustractions indiquées par les parenthèses,

$$\begin{aligned} &ae - be + ce - de \\ &- af + bf - cf + df \\ &+ ag - bg + cg - dg \\ &- ah + bh - ch + dh. \end{aligned}$$

On voit que le produit des deux polynômes renferme le produit de chacun des termes du multiplicande par chacun des termes du multiplicateur.

On reconnaît aussi qu'*un terme du produit a le signe* +

s'il provient de deux termes de même signe, le signe — s'il provient de deux termes de signes contraires. Par exemple, le terme cg, qui provient de deux termes positifs, a le signe $+$; et de même le terme bf, qui provient de deux termes négatifs; au contraire, les termes bg et cf, qui proviennent de deux termes, l'un positif, l'autre négatif, sont affectés du signe $-$.

Il est facile de se rendre compte de cette loi, connue sous le nom de règle des signes, si l'on observe que, dans les parenthèses, les signes sont ceux des termes du multiplicande et que chacune d'elles est affectée du signe du terme correspondant du multiplicateur. Un terme positif, multiplié par un terme positif, donne un terme positif dans la parenthèse; comme la parenthèse est précédée elle-même du signe $+$, ce terme aura finalement le signe $+$. Un terme négatif, multiplié par un terme négatif, donne un terme négatif dans la parenthèse; comme la parenthèse est prédédée elle-même du signe $-$, ce terme, changeant de signe, aura finalement le signe $+$, etc.

Dans la pratique, on ordonne les deux polynômes par rapport aux puissances décroissantes ou par rapport aux puissances croissantes d'une même lettre (n° 36); on multiplie tous les termes du multiplicande successivement par chacun des termes du multiplicateur, en allant de gauche à droite, et l'on écrit les produits partiels par lignes horizontales, de manière que les termes semblables se trouvent placés les uns au-dessous des autres, puis on fait la réduction que cette disposition facilite beaucoup.

Exemples.

49. Exemple I. Multiplier le polynôme

$$4x^5 - 3x^4 - 7x^3 + x^2$$
$$2x^3 - 4x^2 + 5x.$$

On disposera l'opération de la manière suivante

$$
\begin{array}{rrrrrr}
4x^5 - & 3x^4 - & 7x^3 + & x^2 & & \\
2x^3 - & 4x^2 + & 5x & & & \\
\hline
8x^8 - & 6x^7 - & 14x^6 + & 2x^5 & & \\
 & -16x^7 + & 12x^6 + & 28x^5 - & 4x^4 & \\
 & & +20x^6 - & 15x^5 - & 35x^4 + & 5x^3 \\
\hline
8x^8 - & 22x^7 + & 18y^6 + & 15x^5 - & 39x^4 + & 5x^3.
\end{array}
$$

Il y a toujours deux termes dans le produit qui ne se réduisent avec aucun autre, et qui, par conséquent, se conservent intacts au résultat; c'est le produit du premier terme du multiplicande par le premier terme du multiplicateur, et aussi le produit des deux derniers termes. En effet, l'exposant de la lettre ordonnatrice dans un terme quelconque du produit est la somme des exposants de cette lettre dans les deux termes qui l'ont fourni; or, si les deux polynômes ont été ordonnés par rapport aux puissances décroissantes, il est clair que, dans le terme provenant du produit des deux premiers termes, l'exposant, étant la somme des deux plus forts exposants, sera plus grand que dans tout autre terme du produit; ce terme sera donc irréductible. De même, le terme provenant du produit des deux derniers termes, ayant un exposant égal à la somme des deux plus petits exposants, et par conséquent moindre que celui de tout autre terme du produit, sera irréductible. Ainsi le premier terme du produit des deux polynômes ordonnés provient exactement du produit des deux premiers termes, et le dernier terme du produit des deux derniers termes. Cette remarque nous sera très-utile pour effectuer la division de deux polynômes.

Il résulte de là que le degré du produit de deux polynômes est égal au degré du multiplicande, plus le degré du multiplicateur.

50. Exemple II.

$$\begin{array}{llllll}
2a^3 - & 3a^2b - & 5ab^2 + & b^3 & & \\
4a^2 - & 7ab + & 3b^2 & & & \\
\hline
8a^5 - & 12a^4b - & 20a^3b^2 + & 4a^2b^3 & & \\
 & -14a^4b + & 21a^3b^2 + & 35a^2b^3 - & 7ab^4 & \\
 & & +6a^3b^2 - & 9a^2b^3 - & 15ab^4 + & 3b^5 \\
\hline
8a^5 - & 26a^4b + & 7a^3b^2 + & 30a^2b^3 - & 22ab^4 + & 3b^5.
\end{array}$$

Les deux polynômes ont été ordonnés par rapport aux puissances décroissantes de a, et les termes qui ne contiennent pas a sont regardés comme étant du degré o par rapport à cette lettre.

51. Exemple III. Quand les polynômes proposés ne sont pas complets, on laisse des intervalles vides afin de pouvoir placer les termes semblables les uns au-dessous des autres.

$$\begin{array}{lllllllll}
x^5 & -2x^3 & +7x & -1 & & & & & \\
x^4 & -3x^3 & +2 & & & & & & \\
\hline
x^9 & & -2x^7 & & +7x^5 & -x^4 & & & \\
 & -3x^8 & & +6x^6 & & -21x^4 & +3x^3 & & \\
 & & & & +2x^5 & & -4x^3 & +14x & -2 \\
\hline
x^9 & -3x^8 & -2x^7 & +6x^6 & +9x^5 & -22x^4 & -x^3 & +14x & -2
\end{array}$$

52. Exemple IV. Multiplier les deux polynômes

$$(a^2 - ab)x^2 + (a^3 - 2a^2b + b^3)x - (a^2b^2 + b^4),$$
$$(a^2 + b^2)x^2 - (a^2b + ab^2)x + b^4.$$

Les deux polynômes sont ordonnés par rapport aux puissances décroissantes de x, mais les coefficients, au lieu d'être des nombres donnés, sont des polynômes en a et b, ce qui complique beaucoup l'opération. On la dispose ordinairement de la manière suivante, en plaçant les uns au-dessous des autres les termes qui contiennent la même puissance de x,

et, pour ne pas répéter cette puissance à chaque fois, on trace un trait vertical à la droite duquel on écrit une fois pour toutes la puissance de x. On multiplie tous les termes du multiplicande d'abord par a^2x^2, ensuite par b^2x^2, puis par $-a^2bx$, etc., en disposant le résultat par colonnes verticales comme nous l'avons dit ; puis on réduit les termes semblables dans chaque colonne verticale.

a^2 $-ab$	$x^2 + a^3$ $-2a^2b$ $+ b^3$	$x - a^2b^2$ $- b^4$		
a^2 $+b^2$	$x^2 - a^2b$ $- ab^2$	$x + b^4$		
a^4 $-a^3b$ $+a^2b^2$ $-a\,b^3$	$x^4 + a^5$ $-2a^4b$ $+a^2b^3$ $+a^3b^2$ $-2a^2b^3$ $+ b^5$ $- a^4b$ $+a^3b^2$ $-a^3b^2$ $+a^2b^3$	$x^3 - a^4b^2$ $- a^2b^4$ $- a^2b^4$ $- b^6$ $- a^5b$ $+2a^4b^2$ $- a^2b^4$ $- a^4b^2$ $+2a^3b^3$ $- ab^5$ $+ a^2b^4$ $- ab^5$	$x^2 + a^4b^3$ $+ a^2b^5$ $+ a^3b^4$ $+ ab^6$ $+ a^3b^4$ $-2a^2b^5$ $+ b^7$	$x - a^2b^6$ $- b^8$
a^4 $-a^3b$ $+a^2b^2$ $-a\,b^3$	$x^4 + a^5$ $-3a^4b$ $+ a^3b^2$ $+ b^5$	$x^3 - a^5b$ $+2a^3b^3$ $-2a^2b^4$ $-2ab^5$ $- b^6$	$x^2 + a^4b^3$ $+2a^3b^4$ $- a^2b^5$ $+ ab^6$ $+ b^7$	$x - a^2b^6$ $- b^8$

Remarques sur la multiplication.

53. REMARQUE I. Nous avons établi (nº 47), la règle de la multiplication des polynômes, en supposant que, dans le polynôme multiplicateur, la somme des termes positifs est plus grande que celle des termes négatifs, et nous avons vu que l'opération revient à ajouter le produit du multiplicande par la somme des termes positifs du multiplicateur, et à retran-

cher le produit du multiplicande par la somme des termes négatifs. Il est naturel d'étendre cette idée au cas où la somme des termes positifs du multiplicateur est plus petite que celle des termes négatifs ; nous dirons donc que multiplier par un polynôme quelconque, c'est multiplier par la somme des termes positifs, et par la somme des termes négatifs, ajouter le premier produit et retrancher le second. De cette manière la règle à laquelle nous sommes arrivés sera générale.

Soit, par exemple, l'expression

$$a - (b - c)(d - e)$$

dans laquelle nous supposons b plus grand que c, d plus grand que e. Nous avons à retrancher le produit de deux polynômes ; il suffit pour cela de changer les signes de l'un d'eux ; car il est évident que l'on change ainsi les signes de tous les termes du produit, et l'on sait que la soustraction revient à un changement de signes. Nous pouvons donc écrire l'expression sous l'une des deux formes

$$a + (c - b)(d - e)$$

ou

$$a + (b - c)(e - d).$$

L'un des polynômes devient négatif ; mais ceci n'offre aucun inconvénient, puisque si l'on effectue la multiplication d'après la règle énoncée, les trois expressions donnent naissance au même polynôme

$$a - bd + cd + be - ce.$$

Si l'on change les signes des deux polynômes, le produit ne change pas ; ainsi l'expression précédente peut encore être mise sous la forme

$$a - (c - b)(e - d).$$

54. Il convient aussi d'appliquer la même définition à des termes pris isolément, et nous dirons que multiplier

une quantité quelconque par une quantité affectée du signe $+$ ou du signe $-$, c'est multiplier par cette quantité et ajouter ou retrancher le produit, suivant que le multiplicateur est positif ou négatif.

Reprenons l'expression

$$a-(b-c)(d-e),$$

dans laquelle nous avons supposé b plus grand que c, d plus grand que e. Si nous désignons par f et g les valeurs des deux polynômes $b-c$ et $d-e$, l'expression se réduit à

$$a-fg.$$

Nous avons dit que l'on peut mettre cette expression sous la forme

$$a+(b-c)(e-d);$$

remplaçons les deux polynômes $b-c$ et $e-d$ par leurs valeurs $+f$ et $-g$; nous aurons à multiplier $+f$ par $-g$, ce qui donne $-fg$, et nous retrouvons ainsi le même résultat $a-fg$.

Considérons encore l'expression

$$a+(b-c)(d-e),$$

qui se réduit à

$$a+fg.$$

Nous pouvons la mettre sous la forme

$$a+(c-b)(e-d);$$

remplaçons les deux polynômes $c-b$ et $e-d$ par leurs valeurs $-f$ et $-g$, nous aurons à multiplier $-f$ par $-g$, ce qui donne $+fg$, et nous retrouvons ainsi le même résultat $a+fg$.

Il résulte de cette manière d'envisager la *multiplication algébrique* que le produit de deux polynômes est égal à

la *somme algébrique* des produits du multiplicande par chacun des termes du multiplicateur.

55. Remarque II. Le produit d'une quantité négative par une quantité négative étant positif, le carré d'une quantité négative sera positif; mais le cube, qui est égal au produit du carré par la quantité elle-même, sera négatif; en général les puissances paires d'une quantité négative sont positives, mais les puissances impaires sont négatives.

Cette remarque est importante. Si l'on veut changer le signe d'une lettre dans un polynôme, on changera les signes de toutes les puissances impaires de cette lettre, sans changer ceux des puissances paires.

Par exemple, en multipliant le binôme $a+b$ par lui-même, on trouve

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Changeons le signe de b, le terme $2ab$ changera de signe, mais le terme b^2 ne changera pas; nous aurons donc

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

Ces deux égalités donnent naissance à ces deux théorèmes de géométrie élémentaire : le carré construit sur la somme ou sur la différence de deux lignes égale la somme des carrés construits sur chacune de ces deux lignes, plus ou moins deux fois le rectangle ayant l'une pour base, l'autre pour hauteur.

La multiplication de $a+b$ par $a-b$ donne

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2.$$

En changeant le signe de b on permute simplement les deux facteurs du produit, et l'on voit qu'en effet le second membre ne change pas. L'égalité précédente s'énonce ainsi : le produit de la somme de deux quantités par leur différence

égale la différence des carrés de ces deux quantités. C'est une proposition fréquemment employée en algèbre; elle se traduit en géométrie par ce théorème : le rectangle construit sur la somme et la différence de deux lignes égale la différence des carrés construits sur ces deux lignes.

Si l'on multiplie le carré de $a+b$ par $a+b$, on trouve

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3;$$

on en déduit, en changeant le signe de b,

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$$

CHAPITRE IV.

DIVISION.

---

56. La division est l'opération inverse de la multiplication. Elle a pour but, étant données deux expressions algébriques, nommées, l'une dividende, l'autre diviseur, d'en trouver une troisième, nommée quotient, qui, multipliée par le diviseur, reproduise le dividende.

Quotient de deux puissances d'un même nombre.

57. Soit à diviser a^m par a^n, le quotient sera a^{m-n}; car si l'on multiplie ce quotient par le diviseur a^n, ce que l'on fait en ajoutant les exposants, on reproduit le dividende a^m. On a donc

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}.$$

RÈGLE. *Pour diviser deux puissances d'un même nombre l'une par l'autre, de l'exposant du dividende on retranche celui du diviseur.*

EXEMPLE :

$$\frac{a^7}{a^4} = a^3.$$

Exposant zéro.

58. Le quotient est entier lorsque l'exposant du dividende est plus grand que celui du diviseur. Alors on peut

effectivement retrancher l'exposant du diviseur de celui du dividende.

Lorsque l'exposant du diviseur est égal à celui du dividende, l'application de la règle précédente conduit au symbole a^0; car on a dans ce cas,

$$\frac{a^m}{a^m} = a^{m-m} = a^0.$$

Le symbole a^0, représentant le quotient de deux quantités égales, a une valeur égale à l'unité, quelle que soit la valeur de a. L'emploi de ce symbole est très-utile en algèbre; nous en avons déjà fait usage plusieurs fois implicitement; ainsi nous avons dit (nº 32) que, lorsqu'une lettre n'entre pas dans un monôme, on peut la considérer comme y entrant avec l'exposant zéro, et nous avons supposé le polynôme

$$2a^3 - 5a^2b + 4ab^2 - 6b^3$$

écrit sous la forme

$$2a^3b^0 - 5a^2b + 4ab^2 - 6a^0b^3.$$

Les facteurs introduits b^0 et a^0, étant égaux à l'unité, ne changent pas la valeur du premier ni du dernier terme.

L'emploi de l'exposant zéro simplifie les énoncés : on peut énoncer la règle de la multiplication des monômes en disant simplement que l'on multiplie les coefficients et que l'on ajoute les exposants des mêmes lettres. Il n'y a qu'à supposer, en effet, que, lorsqu'une lettre n'entre pas dans l'un des monômes, elle s'y trouve avec l'exposant zéro.

Lorsque l'exposant du diviseur est plus grand que celui du dividende, le quotient est fractionnaire; on le simplifie en divisant les deux termes par le numérateur. Ainsi

$$\frac{a^4}{a^7} = \frac{1}{a^3}.$$

Dans ce cas, l'application de la règle conduit au symbole a^{-3}, qui représente $\frac{1}{a^3}$; c'est là l'origine des exposants négatifs dont il sera question plus tard.

Division des monômes.

59. La règle formulée pour la multiplication des monômes (n° 45) conduit immédiatement à la règle suivante :

RÈGLE. ***Pour diviser un monôme par un monôme, on divise le coefficient du dividende par celui du diviseur, et l'on retranche les exposants du diviseur des exposants des mêmes lettres dans le dividende.***

Soit à diviser $12a^5b^3c^7de^4$ par $4a^3b^2c^4d$. Le quotient demandé sera $3a^2bc^3e^4$; car si l'on multiplie ce quotient par le diviseur, on reproduira évidemment le dividende. Ainsi

$$\frac{12a^5b^3c^7de^4}{4a^3b^2c^4d} = 3a^2bc^3e^4.$$

En appliquant la règle, on regardera la lettre e comme affectée de l'exposant 0 dans le diviseur.

60. REMARQUE. Pour que le quotient soit entier, il faut que le coefficient du dividende soit divisible par le coefficient du diviseur, et que les exposants du diviseur ne surpassent pas les exposants des mêmes lettres dans le dividende.

La seconde condition est surtout essentielle; car si elle est remplie sans que la première le soit, le quotient aura, il est vrai, un coefficient fractionnaire, mais il sera encore ***entier algébriquement.*** On aura, par exemple,

$$\frac{8a^7b^5c^4d^2e}{12a^4b^3c^2d} = \frac{2}{3}a^3b^2c^2de.$$

On dit qu'une expression est ***entière algébriquement***, lorsqu'elle est entière sauf des coefficients fractionnaires.

Si la seconde condition n'est pas remplie, le quotient sera fractionnaire; mais alors on le simplifiera autant que possible. Par exemple

$$\frac{18a^9b^4c^2d^3}{30a^7b^5c^4} = \frac{3a^2d^3}{5bc^2}.$$

Division d'un polynôme par un monôme.

61. On sait que l'on multiplie un polynôme par un monôme, en multipliant chaque terme du polynôme par le monôme (n° 46) ; on effectuera donc la division d'un polynôme entier par un monôme entier, en divisant chaque terme du dividende par le diviseur. Le quotient sera entier si chaque terme du dividende est divisible séparément par le diviseur ; sinon, il sera fractionnaire.

Division des polynômes.

62. Supposons les deux polynômes ordonnés par rapport aux puissances décroissantes d'une même lettre. La question est de trouver un polynôme entier qui, multiplié par le polynôme diviseur, reproduise le dividende. Imaginons ce polynôme trouvé et ordonné aussi par rapport aux puissances décroissantes de la même lettre. Nous savons que, dans la multiplication de deux polynômes ordonnés (n° 49), le premier terme du produit provient sans réduction de la multiplication du premier terme du multiplicande par le premier terme du multiplicateur. Ainsi, le premier terme du dividende est exactement le produit du premier terme du diviseur par le premier terme du quotient; si donc on divise le

premier terme du dividende par le premier terme du diviseur, on obtiendra le premier terme du quotient.

Le dividende est égal à la somme des produits partiels que l'on obtient en multipliant le diviseur par chacun des termes du quotient; multiplions le diviseur par le premier terme du quotient, et retranchons ce produit du dividende, nous aurons un reste qui sera égal au produit du diviseur par les autres termes du quotient. Ce reste constitue donc un nouveau dividende, sur lequel nous pouvons raisonner comme sur le dividende proposé. Le premier terme de ce nouveau dividende est le produit du premier terme du diviseur par le premier terme du quotient correspondant; en divisant le premier terme du reste par le premier terme du diviseur, on aura donc le second terme du quotient, etc.

Rien n'est changé dans le raisonnement quand on suppose les polynômes ordonnés par rapport aux puissances croissantes d'une même lettre.

On déduit de là la règle suivante :

Règle. *Pour diviser deux polynômes entiers l'un par l'autre, on ordonne ces deux polynômes par rapport aux puissances décroissantes ou par rapport aux puissances croissantes d'une même lettre; on divise le premier terme du dividende par le premier terme du diviseur, ce qui donne le premier terme du quotient; on multiplie le diviseur par ce premier terme du quotient et on retranche le produit du dividende; on divise le premier terme du reste par le premier terme du diviseur, ce qui donne le deuxième terme du quotient; on multiplie le diviseur par ce deuxième terme du quotient, et on retranche le produit du premier reste; on divise le premier terme du deuxième reste par le premier terme du diviseur, et l'on continue de cette manière jusqu'à ce que l'on arrive au dernier terme du quotient.*

On obtient directement le dernier terme du quotient en

divisant le dernier terme du dividende par le dernier terme du diviseur. Car, dans la multiplication de deux polynômes ordonnés, le dernier terme du produit provient aussi sans réduction de la multiplication du dernier terme du multiplicande par le dernier terme du multiplicateur. Arrivé au dernier terme, on doit trouver ensuite un reste nul, si la division se fait exactement.

Il est clair que la loi des signes est la même que dans la multiplication; si les deux termes que l'on divise l'un par l'autre ont le même signe, le terme du quotient devra être affecté du signe $+$; s'ils ont des signes contraires, le terme du quotient devra être affecté du signe $-$.

Exemples.

63. Exemple I. Soit à diviser le polynôme

$$8a^5-26a^4b+7a^3b^2+30a^2b^3-22ab^4+3b^5$$

par le polynôme

$$2a^3-3a^2b-5ab^2+b^3.$$

On dispose l'opération de la manière suivante :

$$\begin{array}{l|l}
8a^5-26a^4b+7a^3b^2+30a^2b^3-22ab^4+3b^5 & 2a^3-3a^2b-5ab^2+b^3 \\
\hline
-8a^5+12a^4b+20a^3b^2-4a^2b^3 & 4a^2-7ab+3b^2 \\
\hline
-14a^4b+27a^3b^2+26a^2b^3-22ab^4+3b^5 & \\
+14a^4b-21a^3b^2-35a^2b^3+7ab^4 & \\
\hline
+6a^3b^2-9a^2b^3-15ab^4+3b^5 & \\
-6a^3b^2+9a^2b^3+15ab^4-3b^5 & \\
\hline
0 &
\end{array}$$

Les deux polynômes sont ordonnés par rapport aux puissances décroissantes de a. On divise le premier terme $8a^5$ du dividende par le premier terme $2a^3$ du diviseur, ce qui donne le premier terme $4a^2$ du quotient. On multiplie tout

le diviseur par $4a^2$ et on retranche le produit du dividende ; pour cela on écrit au-dessous du dividende les différents termes de ce produit, avec des signes contraires, puis on additionne, en réduisant les termes semblables. On obtient ainsi le reste

$$-14a^4b+27a^3b^2+26a^2b^3-22ab^4+3b^5.$$

On divise le premier terme $-14a^4b$ de ce reste par le premier terme $2a^3$ du diviseur, ce qui donne le deuxième terme $-7ab$ du quotient. On observe que ce terme doit être affecté du signe —, en vertu de la règle des signes établie pour la multiplication des polynômes (n° 48) ; en effet, le terme $-14a^4b$ du produit ayant le signe —, les deux termes qui le produisent doivent avoir des signes contraires ; mais le terme $2a^3$ a le signe + ; donc le terme $7ab$ aura le signe —. On multiplie le diviseur par ce deuxième terme et on retranche le produit du reste ; on obtient ainsi un deuxième reste

$$+6a^3b^2-9a^2b^3-15ab^4+3b^5.$$

On divise le premier terme $+6a^3b^2$ de ce deuxième reste par le premier terme $2a^3$ du diviseur, ce qui donne le troisième terme $+3b^2$ du quotient. On multiplie le diviseur par ce troisième terme du quotient ; on en retranche le produit du deuxième reste ; on trouve *zéro*. L'opération est terminée. Le quotient demandé est

$$4a^2-7ab+3b^2.$$

Remarquons que l'on aurait trouvé immédiatement le dernier terme $+3b^2$ du quotient, en divisant le dernier terme $+3b^5$ du dividende par le dernier terme $+b^3$ du diviseur.

Le degré du quotient par rapport à la lettre ordonnatrice est égal au degré du dividende, moin celui du diviseur.

64. Exemple II. Soit encore à diviser

$$4x^4 - 9x^2 + 6x - 1$$

par

$$2x^2 - 3x + 1.$$

Le polynôme dividende n'étant pas complet, on laissera des intervalles vides afin de pouvoir placer les termes semblables les uns au-dessous des autres.

$$\begin{array}{rrrrr|l}
4x^4 & & -9x^2 & +6x & -1 & 2x^2-3x+1 \\
\cline{6-6}
-4x^4 & +6x^3 & -2x^2 & & & 2x^2+3x-1 \\
\cline{1-5}
 & +6x^3 & -11x^2 & +6x & -1 & \\
 & -6x^3 & +9x^2 & -3x & & \\
\cline{2-5}
 & & -2x^2 & +3x & -1 & \\
 & & +2x^2 & -3x & +1 & \\
\cline{3-5}
 & & & 0 & &
\end{array}$$

Remarques sur la division.

65. Remarque I. Quand les polynômes proposés renferment plusieurs termes non semblables du même degré par rapport à la lettre ordonnatrice, les coefficients des diverses puissances de cette lettre sont des polynômes et l'opération devient très-compliquée. Soit à diviser le polynôme

$$\begin{array}{c}
(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3)x^4 + (a^5 - 3a^4b + a^3b^2 + b^5)x^3 \\
+ (-a^5b + 2a^3b^3 - 2a^2b^4 - 2ab^5 - b^6)x^2 \\
+ (a^4b^3 + 2a^3b^4 - a^2b^5 + ab^6 + b^7)x - (a^2b^6 + b^8)
\end{array}$$

par

$$(a^2 + b^2)x^2 - (a^2b + ab^2)x + b^4.$$

On disposera l'opération de la manière suivante :

$$
\begin{array}{r|r|r|r|r|}
a^4 & x^4+a^5 & x^3-a^5b & x^3+a^4b^3 & x-a^2b^6 \\
-a^3b & -3a^4b & +2a^3b^3 & +2a^3b^4 & -b^8 \\
+a^2b^2 & +a^3b^2 & -2a^2b^4 & -a^2b^5 & \\
-ab^3 & +b^5 & -2ab^5 & +ab^6 & \\
 & & -b^6 & +b^7 & \\
\hline
 & +a^4b & -a^2b^4 & -a^3b^4 & +a^2b^6 \\
 & +a^3b^2 & +ab^5 & +2a^2b^5 & +b^8 \\
\cline{5-5}
 & -a^3b^2 & +a^5b & -b^7 & 0 \\
 & -a^2b^3 & +a^4b^2 & -a^4b^3 & \\
\cline{2-2}
 & +a^5 & -2a^4b^2 & -a^3b^4 & \\
 & -2a^4b & -2a^3b^3 & -a^2b^5 & \\
 & +a^3b^2 & +a^2b^4 & -ab^6 & \\
\cline{4-4}
 & -a^2b^3 & +ab^5 & 0 & \\
\cline{3-3}
 & +b^5 & -a^4b^2 & & \\
 & & -2a^2b^4 & & \\
 & & -b^6 & & \\
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|r|l}
a^2 & x^2-a^2b & x+b^4 \\
+b^2 & -ab^2 & \\
\hline
a^2 & x^2+a^3 & x-a^2b^2 \\
-ab & -2a^2b & -b^4 \\
 & +b^3 & \\
\end{array}
$$

1re DIVISION PARTIELLE.

$$
\begin{array}{l|l}
a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3 & a^2+b^2 \\
\cline{2-2}
-a^4 \qquad -a^2b^2 & a^2-ab \\
\cline{1-1}
-a^3b \qquad -ab^3 & \\
+ab^3 \qquad +ab^3 & \\
\cline{1-1}
0 & \\
\end{array}
$$

2e DIVISION PARTIELLE.

$$
\begin{array}{l|l}
a^5-2a^4b+a^3b^2-a^2b^3+b^5 & a^2+b^2 \\
\cline{2-2}
-a^5 \qquad -a^3b^2 & a^3-2a^2b+b^3 \\
\cline{1-1}
-2a^4b \qquad -a^2b^3+b^5 & \\
+2a^4b \qquad +2a^2b^3 & \\
\cline{1-1}
+a^2b^3+b^5 & \\
-a^2b^3-b^5 & \\
\cline{1-1}
0 & \\
\end{array}
$$

3e DIVISION PARTIELLE.

$$\begin{array}{r|l} -a^4b^2-2a^2b^4-b^6 & a^2+b^2 \\ +a^4b^2+\ a^2b^4 \quad & \overline{-a^2b^2-b^4} \\ \hline -\ a^2b^4-b^6 & \\ +\ a^2b^4+b^6 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Les deux polynômes sont ordonnés par rapport aux puissances décroissantes de x et les coefficients sont eux-mêmes ordonnés par rapport aux puissances décroissantes de a. Pour avoir le premier terme du quotient, il faut diviser le premier terme du dividende par le premier terme du diviseur; on divisera donc le coefficient

$$a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3$$

du premier terme du dividende par le coefficient a^2+b^2 du premier terme du diviseur, faisant cette division à part, on trouve ainsi

$$(a^2-ab)x^2$$

pour le premier terme du quotient. On multiplie le diviseur par le premier terme du quotient et on écrit le résultat avec des signes contraires au-dessous du dividende et dans les colonnes verticales convenables. Il est inutile d'écrire le produit du premier terme du diviseur, car on sait d'avance que ce produit détruira le premier terme du dividende. Comme il suffit de connaître le premier terme du reste pour continuer l'opération, on ne fera la réduction des termes semblables que dans la deuxième colonne verticale.

Pour avoir le deuxième terme du quotient, on divise le premier terme du reste par le premier terme du diviseur, ce qui exige que l'on effectue à part la division du coefficient

$$a^5-2a^4b+a^3b^2-a^2b^3+b^5$$

de ce premier terme par le coefficient $a^2 + b^2$ du premier terme du diviseur ; on trouve ainsi

$$+(a^3 - 2a^2b + b^3)x$$

pour le deuxième terme du quotient. On multiplie le diviseur par le deuxième terme du quotient, et on écrit le résultat avec des signes contraires au-dessous du dividende et dans les colonnes convenables ; il est inutile d'écrire le produit du premier terme du diviseur, puisqu'on sait que ce produit détruit le premier terme du reste. On réduira les termes semblables dans la troisième colonne verticale, afin d'avoir le premier terme du nouveau reste.

Divisant à part le coefficient

$$-a^4b^2 - 2a^2b^4 - b^6$$

du premier terme du deuxième reste par le coefficient $a^2 + b^2$ du premier terme du diviseur, on obtient le troisième terme du quotient

$$-a^2b^2 - b^4.$$

On multiplie le diviseur par le troisième terme du quotient et on écrit le résultat avec des signes contraires au-dessous du dividende ; il est inutile comme précédemment d'écrire le produit du premier terme du diviseur. Réduisant les termes semblables dans la quatrième et la cinquième colonne verticale, on trouve un reste nul. L'opération est terminée.

66. Remarque II. Les raisonnements précédents et les conclusions que nous en avons tirées supposent qu'il existe un polynôme entier qui, multiplié par le diviseur, reproduit le dividende. Voyons à quels caractères on reconnaît la possibilité de la division.

Les polynômes étant ordonnés par rapport aux puis-

sances croissantes ou décroissantes d'une même lettre, il est nécessaire d'abord que le premier terme du dividende soit divisible par le premier terme du diviseur et le dernier terme du dividende par le dernier terme du diviseur. Soit, par exemple, à diviser

$$x^5 - 3x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 8x$$

par

$$x^3 - 4x^2.$$

Le dernier terme $8x$ du dividende n'est pas divisible par le dernier terme $4x^2$ du diviseur; donc la division est impossible.

Lorsque ces deux conditions sont remplies, on effectue la division par le procédé ordinaire; si l'opération ne conduit pas au dernier terme tel qu'on l'a obtenu directement, la division est impossible. Soit, par exemple, à diviser

$$2 - 3x - 5x^2 + 4x^3 - 6x^4$$

par

$$1 - 4x + 3x^2.$$

Le premier terme du dividende est divisible par le premier terme du diviseur, ce qui donne 2 pour le premier terme du quotient; le dernier terme est aussi divisible par le dernier terme, ce qui donne $-2x^2$ pour le dernier terme du quotient. Effectuons l'opération suivant le procédé ordinaire.

$$\begin{array}{rrrrr|l} 2 & -3x & -5x^2 & +4x^3 & -6x^4 & 1 - 4x + 3x^2 \\ \cline{6-6} -2 & +8x & -6x^2 & & & 2 + 5x + 9x^2 \\ \cline{1-5} & +5x & -11x^2 & +4x^3 & -6x^4 & \\ & -5x & +20x^2 & -15x^3 & & \\ \cline{2-5} & & +9x^2 & -11x^3 & -6x^4 & \end{array}$$

L'opération nous conduit à un dernier terme $+ 9x^2$, qui n'est pas égal au dernier terme $- 2x^2$, tel qu'on l'a trouvé directement. Donc la division est impossible.

Soit encore à diviser

$$x^4 - 5x^3 - 2x^2 + 3x + 4$$

par

$$x^2 - 2x + 3.$$

La division du dernier terme du dividende par le dernier terme du diviseur donne $\frac{4}{3}$ pour le dernier terme du quotient. Mais le coefficient du premier terme du diviseur étant l'unité, on n'aura dans le calcul que des coefficients entiers, et par conséquent on n'arrivera pas à un dernier terme fractionnaire. Donc la division est impossible.

Lorsque l'opération conduit au dernier terme tel qu'on l'a obtenu à priori, il faut encore que le reste suivant soit nul. Soit, par exemple, à diviser

$$2 - 3x - 16x^2 + 4x^3 - 6x^4$$

par

$$1 - 4x + 3x^2.$$

L'opération conduit au dernier terme $-2x^2$ tel qu'on l'obtient directement, mais le reste suivant n'est pas nul. Donc la division est impossible.

67. Remarque III. En général, on ordonne les deux polynômes par rapport aux puissances décroissantes d'une même lettre. Soit m le degré du dividende, n celui du diviseur, m étant supposé plus grand que n; en effectuant l'opération, on obtient au quotient un polynôme entier du degré $m - n$. On observe que les degrés des restes successifs vont donc en diminuant d'unité en unité; on poussera l'opération jusqu'à ce que l'on arrive à un reste d'un degré inférieur à celui du diviseur. Si ce reste est nul, la division se fait exactement et le quotient est entier. S'il n'est pas nul, il est impossible de continuer l'opération ; le quotient est fractionnaire, et pour le compléter on ajoute une fraction ayant pour numérateur le denier reste, et pour dénominateur le diviseur. En voici un exemple :

$$\begin{array}{r|l} x^4 - 7x^3 + 10x^2 + 7x - 5 & x^2 - 5x + 3 \\ \cline{2-2} -x^4 + 5x^3 - 3x^2 & x^2 - 2x - 3 \\ \cline{1-1} -2x^3 + 7x^2 + 7x - 5 & \\ +2x^3 - 10x^2 + 6x & \\ \cline{1-1} -3x^2 + 13x - 5 & \\ +3x^2 - 15x + 9 & \\ \cline{1-1} -2x + 4 & \end{array}$$

On a

$$\frac{x^4-7x^3+10x^2+7x-5}{x^2-5x+3}=x^2-2x-3-\frac{2x-4}{x^2-5x+3}.$$

Exemples.

68. QUESTION I. *Diviser* $x^m - a^m$ *par* $x - a$.

$$\begin{array}{lr|l} & x^m \quad -a^m & x-a \\ \cline{3-3} 1^{\text{er}} \text{ reste.} & a\,x^{m-1}-a^m & x^{m-1}+ax^{m-2}+a^2x^{m-3}\ldots+a^{m-2}x+a^{m-1} \\ 2^{\text{e}} \text{ reste.} & a^2x^{m-2}-a^m & \\ & \cdots\cdots & \\ & \cdots\cdots & \\ & a^{m-1}x-a^m & \\ \text{Dernier reste.} & a^m-a^m=0. & \end{array}$$

La loi des termes du quotient est facile à observer. Tous les termes sont positifs; les exposants de x vont en diminuant, tandis que ceux de a vont en augmentant. Le dernier reste étant nul, la division se fait exactement, quel que soit l'exposant m. On a donc

$$\frac{x^m-a^m}{x-a}=x^{m-1}+ax^{m-2}+a^2x^{m-3}\ldots+a^{m-2}x+a^{m-1}.$$

Ce résultat est d'un usage fréquent en algèbre; il est bon de se le rappeler.

On pouvait d'ailleurs reconnaître à priori la possibilité de la division. En effet, on sait qu'en effectuant l'opération

on trouvera un quotient entier du degré $m-1$ par rapport à x et un reste du degré 0 par rapport à x, c'est-à-dire indépendant de x. Si donc on désigne par q le quotient et par r le reste, on aura

$$x^m - a^m = (x-a)q + r.$$

Cette égalité a lieu quelle que soit la valeur de x; or, donnons à x la valeur de a, le premier membre devient nul, le premier terme du second membre devient aussi nul; car le facteur $x-a$ devenant nul, et le polynôme entier q prenant nécessairement une valeur finie, le produit devient nul; donc le reste r est nul; et il est identiquement nul, c'est-à-dire qu'il est nul, quelle que soit x, puisqu'il ne contient pas cette lettre. Donc la division est possible.

69. QUESTION II. *Diviser* $x^m + a^m$ *par* $x-a$.

$$\begin{array}{ll|l} & x^m \quad + a^m & x-a \\ \cline{3-3} \text{1}^{\text{er}} \text{ reste.} & a\,x^{m-1} + a^m & x^{m-1} + ax^{m-2} + a^2x^{m-3} \ldots + a^{m-2}x + a^{m-1} \\ \text{2}^{\text{e}} \text{ reste.} & a^2x^{m-2} + a^m & \\ & \ldots\ldots & \\ & \ldots\ldots & \\ & a^{m-1}x + a^m & \\ \text{Dernier reste.} & a^m + a^m = 2a^m. & \end{array}$$

Le quotient est le même que dans l'exemple précédent; seulement le dernier reste, au lieu d'être nul, est égal à $2a^m$. La division est impossible. Le quotient est fractionnaire et l'on a

$$\frac{x^m + a^m}{x-a} = x^{m-1} + ax^{m-2} \ldots + a^{m-1} + \frac{2a^m}{x-a}.$$

On peut aussi reconnaître à priori l'impossibilité de la division. Car, en appelant toujours q le quotient et r le reste, on a

$$x^m + a^m = (x-a)q + r;$$

d'où l'on déduit $2a^m = r$, en faisant $x = a$.

70. Question III. *Diviser* $x^m - a^m$ *par* $x + a$.

Il faut ici distinguer deux cas, suivant que m est pair ou impair. 1° m pair.

$$\begin{array}{l|l} \quad x^m \quad -a^m & x+a \\ \hline 1^{er} \text{ reste.} -a\,x^{m-1}-a^m & x^{m-1}-ax^{m-2}+a^2x^{m-3}\ldots\ldots+a^{m-2}x-a^{m-1} \\ 2^e \text{ reste.} +a^2x^{m-2}-a^m & \\ \quad \cdots\cdots\cdots & \\ \quad \cdots\cdots\cdots & \\ \quad -a^{m-1}x-a^m & \\ D^{er} \text{ reste.} \quad +a^m-a^m=0. & \end{array}$$

Les termes du quotient sont affectés alternativement du signe + et du signe —. Le quotient, étant un polynôme complet du degré $m - 1$, contient m termes, c'est-à-dire un nombre pair de termes, si m est pair ; comme les signes alternent en commençant par le signe +, le dernier terme sera affecté du signe —, et par conséquent le dernier reste sera $+ a^m - a^m$ ou zéro. Ainsi, dans ce cas, la division est possible.

2° Si m est impair, le quotient, ayant un nombre impair de termes, se termine par le signe +, et le reste est $- a^m - a^m$ ou $- 2a^m$. Ainsi, dans ce cas, la division est impossible.

71. Question IV. *Diviser* $x^m + a^m$ *par* $x + a$.

Le quotient a la même forme que dans l'exemple précédent. Si m est impair, le dernier terme du quotient a le signe + et l'on a pour reste $- a^m + a^m$, c'est-à-dire zéro ; la division est possible. Mais si m est pair, le dernier terme du quotient a le signe — et l'on a pour reste $+ a^m + a^m$, c'est-à-dire $2a^m$; la division est impossible.

On peut rattacher ces deux derniers exemples aux deux précédents par des considérations sur les changements de signes. Nous savons que, lorsqu'on change le signe d'une

lettre, les puissances impaires de cette lettre changent de signes, tandis que les puissances paires ne changent pas. La division effectuée au n° 68 prouve que l'on a

$$x^m - a^m = (x - a)(x^{m-1} + ax^{m-2} + a^2x^{m-3} \ldots - a^{m-1});$$

changeons le signe de *a*; nous aurons, si *m* est pair,

$$x^m - a^m = (x + a)(x^{m-1} - ax^{m-2} + a^2x^{m-3} \ldots + a^{m-1});$$

et, si *m* est impair,

$$x^m + a^m = (x + a)(x^{m-1} - ax^{m-2} + a^2x^{m-3} \ldots + a^{m-1}).$$

On en conclut que $x^m - a^m$ est divisible par $x + a$, quand *m* est pair, et $x^m + a^m$ par $x + a$ quand *m* est impair.

72. En résumant ce qui précède, on voit qu'une opération algébrique a pour but de composer un polynôme au moyen de deux ou de plusieurs polynômes donnés, d'après certaines règles déterminées.

A un point de vue plus général, on peut considérer une opération algébrique comme ayant pour but de transformer une expression en une autre équivalente. On dit que deux expressions algébriques sont *équivalentes* lorsqu'elles fournissent le même résultat, quelles que soient les valeurs numériques attribuées aux lettres. Ainsi les deux expressions

$$(a + b)^2, \quad a^2 + 2ab + b^2,$$

qui indiquent deux séries d'opérations différentes à effectuer sur les quantités *a* et *b*, conduiront toujours au même résultat, quelles que soient les valeurs particulières attribuées aux lettres *a* et *b*; ces deux expressions sont donc équivalentes, et l'on peut remplacer l'une par l'autre à volonté. Il est clair que les opérations algébriques transforment les expressions en d'autres équivalentes; car, dans les raisonnements, les lettres représentent des quantités quelconques, et non telles ou telles valeurs particulières.

CHAPITRE V.

FRACTIONS ALGÉBRIQUES.

On appelle *fraction algébrique* le quotient de deux quantités quelconques, entières ou fractionnaires, positives ou négatives. Les fractions algébriques jouissent des mêmes propriétés que les fractions arithmétiques.

Théorème I.

73. ***On ne change pas la valeur d'une fraction en multipliant ou en divisant ses deux termes par une même quantité.***

Soit la fraction algébrique $\frac{a}{b}$, dont nous désignerons par q la valeur. On a

$$\frac{a}{b}=q,$$

ou

$$a=bq.$$

Si l'on multiplie les deux membres de cette égalité par la même quantité c, il vient

$$ac=bqc=bcq,$$

d'où

$$\frac{ac}{bc}=q.$$

Donc

$$\frac{ac}{bc}=\frac{a}{b}.$$

Réciproquement, si l'on divise les deux termes de la

fraction $\frac{a}{b}$ par une même quantité c, on obtient une fraction égale

$$\frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}};$$

car, en multipliant par c les deux membres de cette dernière fraction, on reproduit la fraction proposée.

COROLLAIRE I. *On ne change pas la valeur d'une fraction en changeant les signes de ses deux termes ;* car ceci revient à multiplier ses deux termes par -1.

COROLLAIRE II. *Pour réduire plusieurs fractions au même dénominateur, on multiplie les deux termes de chacune d'elles par le produit des dénominateurs de toutes les autres.*

COROLLAIRE III. *Pour réduire une fraction à sa plus simple expression, on divise ses deux termes par tous leurs facteurs communs.*

COROLLAIRE IV. *On effectue l'addition ou la soustraction de plusieurs fractions en réduisant ces fractions au même dénominateur, et ajoutant ou retranchant les numérateurs.*

THÉORÈME II.

74. *On multiplie deux fractions, en multipliant numérateur par numérateur, dénominateur par dénominateur.*

Soient les deux fractions $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ dont nous désignerons les valeurs par q et q'; on a

$$\frac{a}{b} = q, \quad \frac{c}{d} = q',$$

ou

$$a = bq, \quad c = dq'.$$

Si l'on multiplie ces deux égalités membre à membre, il vient

$$ac = bdqq';$$

d'où

$$\frac{ac}{bd} = qq'.$$

Ainsi

$$\frac{ac}{bd} = \frac{a}{b} \times \frac{c}{d}.$$

THÉORÈME III.

75. *On divise une quantité par une fraction, en multipliant cette quantité par la fraction diviseur renversée.*

Soit à diviser la fraction $\frac{a}{b}$ par la fraction $\frac{c}{d}$. Je dis que le quotient cherché égale

$$\frac{ad}{bc};$$

car, si l'on multiplie ce quotient par le diviseur, et si l'on simplifie, on reproduit le dividende.

THÉORÈME IV.

76. *Lorsqu'on a plusieurs fractions égales et qu'on ajoute les numérateurs et les dénominateurs, on forme une nouvelle fraction égale à chacune des fractions proposées.*

Soient les fractions égales

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} = \frac{a''}{b''} = \ldots..$$

En désignant par q la valeur de chacune d'elles, on a

$$\frac{a}{b} = q, \qquad \frac{a'}{b'} = q, \qquad \frac{a''}{b''} = q, \ldots..$$

ou

$$a = bq, \qquad a' = b'q, \qquad a'' = b''q, \ldots..$$

Si l'on ajoute ces diverses égalités membre à membre, il vient

$$a + a' + a'' + \ldots.. = (b + b' + b'' + \ldots..)q,$$

d'où

$$\frac{a + a' + a'' + \ldots..}{b + b' + b'' + \ldots..} = q.$$

COROLLAIRE I. *Lorsqu'on a plusieurs fractions égales, si, après avoir multiplié les deux termes de chacune d'elles par une même quantité, on ajoute les numérateurs et les dénominateurs, on forme une nouvelle fraction égale à chacune de sfractions proposées.*

Soient les fractions égales

$$\frac{a}{b}=\frac{a'}{b'}=\frac{a''}{b''}=\ldots..$$

Si l'on multiplie les deux termes de la première par m, ceux de la seconde par m',......, on obtient des fractions

$$\frac{ma}{mb}=\frac{m'a'}{m'b'}=\frac{m''a''}{m''b''}\ldots..$$

égales respectivement aux fractions proposées, et par conséquent égales entre elles. Donc la nouvelle fraction

$$\frac{ma+m'a'+m''a''+\ldots..}{mb+m'b'+m''b''+\ldots..}$$

est aussi egale à chacune des fractions proposées.

COROLLAIRE II. *Lorsqu'on a plusieurs fractions égales, la fraction qui a pour numérateur la racine carrée de la somme des carrés des numérateurs, et pour dénominateur la racine carrée de la somme des carrés des dénominateurs, est égale à chacune des fractions proposées.*

En effet les carrés des fractions égales

$$\frac{a}{b}=\frac{a'}{b'}=\frac{a''}{b''}=\ldots..$$

sont des fractions égales

$$\frac{a^2}{b^2}=\frac{a'^2}{b'^2}=\frac{a''^2}{b''^2}=\ldots..$$

En vertu du théorème précédent, on a

$$\frac{a^2+a'^2+a''^2+\ldots..}{b^2+b'^2+b''^2+\ldots..}=\frac{a^2}{b^2};$$

si l'on prend la racine carrée, il vient

$$\frac{\sqrt{a^2+a'^2+a''^2+\ldots\ldots}}{\sqrt{b^2+b'^2+b''^2+\ldots\ldots}}=\frac{a}{b}.$$

Exemples.

1° Trouver les côtés d'un rectangle semblable à un rectangle donné, connaissant le périmètre.

Appelons a et b les deux côtés du rectangle donné, $2p$ le périmètre donné, x et y les deux côtés du rectangle cherché. On a les rapports égaux

$$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}.$$

En ajoutant les numérateurs et les dénominateurs, on forme la fraction égale

$$\frac{x+y}{a+b}=\frac{p}{a+b};$$

on a donc

$$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{p}{a+b};$$

d'où l'on déduit, en égalant chacune des deux premières fractions à la troisième,

$$x=\frac{pa}{a+b},\qquad y=\frac{pb}{a+b}.$$

2° Trouver les côtés d'un rectangle semblable à un rectangle donné, connaissant la diagonale d.

Si l'on applique la corollaire II aux deux fractions égales

$$\frac{x}{a}=\frac{y}{b},$$

on forme la fraction égale

$$\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{d}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

On a donc

$$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{d}{\sqrt{a^2+b^2}};$$

d'où l'on déduit

$$x=\frac{da}{\sqrt{a^2+b^2}}, \qquad y=\frac{db}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

3° Trouver les côtés d'un rectangle semblable à un rectangle donné, conduisant l'excès e du demi-périmètre sur la diagonale.

Les deux fractions égales

$$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}$$

donnent naissance aux deux fractions égales

$$\frac{x+y}{a+b} \quad \text{et} \quad \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

qui, à leur tour, produisent la fraction égale

$$\frac{x+y-\sqrt{x^2+y^2}}{a+b-\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{e}{a+b-\sqrt{a^2+b^2}}.$$

On a donc

$$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{e}{a+b-\sqrt{a^2+b^2}},$$

d'où l'on déduit les valeurs de x et de y.

Exercices sur le Livre Ier.

QUESTION I. Faire la multiplication

$$(a^2+ab+b^2)(a-b).$$

Réponse : le produit est a^3-b^3.

QUESTION II. Faire la multiplication

$$(a^2-ab+b^2)(a+b).$$

Réponse : a^3+b^3.

Question III. Faire la multiplication

$$(a^m + a^{m-1}b + a^{m-2}b^2 \ldots + b^m)(a-b).$$

Réponse : $a^{m+1} - b^{m+1}.$

Question IV. Faire la multiplication

$$(3a^2x - 5b^3)(3a^2x + 5b^3).$$

Réponse : $9a^4x^2 - 25b^6.$

Question V. Faire la multiplication

$$(5ab + 3ac - c^2)(-5ab + 3ac - c^2).$$

Réponse : $-25a^2b^2 + 9a^2c^2 - 6ac^3 + c^4.$

Question VI. Faire la division

$$\frac{2a^4 - 13a^3b + 31a^2b^2 - 38ab^3 + 24b^4}{2a^2 - 3ab + 4b^2}.$$

Réponse : $a^2 - 5ab + 6b^2.$

Question VII. Faire la division

$$\frac{4x^4 - 9a^2x^2 + 6a^3x - a^4}{2x^2 - 3ax + a^2}.$$

Réponse : $2x^2 + 3ax - a^2.$

Question VIII. Calculer

$$\frac{a^6 - b^6}{a^2 - b^2}.$$

Réponse : $a^4 + a^2b^2 + b^4.$

Question IX. Calculer

$$\frac{125a^3 - 8b^3}{5a - 2b}.$$

Réponse : $25a^2 + 10ab + 4b^2.$

Question X. Multiplier le polynôme

$$(a-b)x^2 + a(a-b)x - ab^2.$$

par

$$(a+b)x - a^2.$$

Réponse : $(a^2 - b^2)x^3 + ab(a-b)x^2 - (a^4 - a^3b + a^2b^2 + ab^3)x + a^3b^2.$

Question XI. Simplifier l'expression

$$\frac{6ab}{3c-d}\left(\frac{c+d}{4} - \frac{d}{3}\right).$$

Réponse : $\frac{ab}{2}.$

Question XII. Simplifier l'expression

$$\frac{a - \frac{a-b}{1+ab}}{1 + \frac{a(a+b)b}{1-ab}}.$$

Réponse : $b.$

QUESTION XIII. Vérifier l'égalité

$$(a^2 + b^2)(a'^2 + b'^2) - (aa' + bb')^2 = (ab' - ba')^2.$$

QUESTION XIV. Vérifier l'égalité

$$(a^2 + b^2 + c^2)(a'^2 + b'^2 + c'^2) - (aa' + bb' + cc')^2$$
$$= (ab' - ba')^2 + (bc' - cb')^2 + (ca' - ac')^2.$$

QUESTION XV. Reconnaître dans quel cas $a^m - b^n$ est divisible par $a^p - b^q$.

Réponse. Il faut que les deux exposants m et n du dividende soient des équimultiples des deux exposants p et q du diviseur.

QUESTION XVI. Additionner les fractions

$$\frac{1}{(a-b)(a-c)} + \frac{1}{(b-a)(b-c)} + \frac{1}{(c-a)(c-b)},$$
$$\frac{a}{(a-b)(a-c)} + \frac{b}{(b-a)(b-c)} + \frac{c}{(c-a)(c-b)},$$
$$\frac{a^2}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^2}{(b-a)(b-c)} + \frac{c^2}{(c-a)(c-b)},$$
$$\frac{a^3}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^3}{(b-a)(b-c)} + \frac{c^3}{(c-a)(c-b)}.$$

Réponse. Les deux premières sommes sont égales à zéro, la troisième à l'unité, et la quatrième à $a + b + c$.

LIVRE II.

ÉQUATIONS DU PREMIER DEGRÉ.

CHAPITRE PREMIER.

RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS DU PREMIER DEGRÉ.

Définitions.

77. Une *identité* est une égalité évidente par elle-même, comme

$$a = a.$$

Une *équation* est une égalité dans laquelle entrent une ou plusieurs lettres désignant des quantités inconnues.

Résoudre des équations, c'est trouver les valeurs des inconnues qui satisfont aux équations proposées, c'est-à-dire qui rendent égaux les deux membres de chacune d'elles. Si l'on remplace les inconnues par leurs valeurs, les équations deviennent des identités.

On dit que deux équations sont *équivalentes*, lorsque toutes les valeurs des inconnues qui satisfont à l'une satisfont à l'autre et réciproquement.

Deux systèmes d'équations simultanées sont *équivalents*, lorsque toutes les valeurs des inconnues qui satisfont à l'un satisfont à l'autre et réciproquement.

Il est clair que, dans la résolution des équations, on peut

remplacer une équation par une équation équivalente, un système d'équations par un système équivalent.

78. On appelle *degré* d'une équation la plus grande somme des exposants de toutes les inconnues dans un même terme. Ainsi les équations

$$5x - 7 = 24 + 2x,$$
$$7x + 6y = 40,$$

sont du premier degré. Les équations

$$4x^2 - 7y = 15,$$
$$5x - 3y = 2xy - 3,$$

sont du second degré; dans cette dernière le terme $2xy$ est du second degré par rapport aux deux inconnues x et y.

On a classé les équations d'après leurs degrés. Nous nous occuperons d'abord des équations du premier degré.

Résolution d'une équation du premier degré à une inconnue.

79. La résolution d'une équation du premier degré à une inconnue dépend de principes très-simples dont nous avons déjà parlé dans l'introduction (nos 7 et 8) et que nous allons exposer avec plus de détail.

THÉORÈME I.

Si aux deux membres d'une équation on ajoute une même quantité, ou si des deux membres on retranche une même quantité, on transforme cette équation en une autre équivalente.

Appelons A et B les deux membres de l'équation proposée, qui sera ainsi représentée par

$$A = B,$$

et, afin de simplifier, supposons qu'elles ne contiennent qu'une seule inconnue x. Une solution de cette équation est une valeur de x qui rend les deux expressions algébriques A et B égales entre elles. En ajoutant aux deux membres la même quantité C, nous formerons une nouvelle équation

$$A + C = B + C,$$

équivalente à la proposée. En effet, toute valeur de x, qui satisfait à la première équation, satisfait aussi à la seconde; car, si aux deux quantités égales A et B on ajoute la même quantité C, on obtient deux quantités égales $A + C$ et $B + C$. Réciproquement, toute valeur de x, qui satisfait à la seconde équation, satisfait aussi à la première; car, si des deux quantités égales $A + C$ et $B + C$ on retranche la même quantité C, on obtient deux restes égaux A et B. Les deux équations, admettant les mêmes solutions, sont donc équivalentes.

On démontrerait de la même manière qu'en retranchant une même quantité C des deux membres de l'équation proposée, on forme une nouvelle équation équivalente

$$A - C = B - C.$$

80. Corollaire I. *Un terme quelconque d'une équation peut être écrit dans l'autre membre avec un signe contraire.*

Soit l'équation

$$6x - 7 = 13 + 2x.$$

Si nous ajoutons 7 aux deux membres, l'équation devient

$$6x = 13 + 2x + 7;$$

le terme 7, qui avait le signe — dans le premier membre, est passé dans le second membre avec le signe +. De même, si nous retranchons $2x$ des deux membres, l'équation devient

$$6x - 2x = 13 + 7;$$

le terme $2x$, qui avait le signe $+$ dans le second membre, est passé dans le premier avec le signe $-$.

81. Corollaire II. *On peut changer les signes de tous les termes d'une équation.* Soit l'équation

$$10 - 3x = 5x - 6.$$

Si l'on fait passer dans le second membre tous les termes du premier et réciproquement, cette équation devient

$$-5x + 6 = -10 + 3x,$$

ou, en transposant les deux membres,

$$-10 + 3x = -5x + 6.$$

Théorème II.

82. *Si l'on multiplie ou si l'on divise les deux membres d'une équation par une même quantité ne renfermant aucune inconnue, on transforme cette équation en une équation équivalente.*

En vertu du théorème précédent, nous pouvons supposer que l'on a fait passer tous les termes de l'équation dans le premier membre, de sorte que, si nous appelons A ce premier membre, l'équation sera représentée par

$$A = 0.$$

Une solution de cette équation est une valeur de x qui rend l'expression algébrique A égale à zéro. En multipliant tous les termes de cette équation par un nombre donné m, nous formerons une nouvelle équation

$$mA = 0,$$

équivalente à l'équation proposée. En effet, toute valeur de x qui satisfait à la première équation satisfait aussi à la seconde; car, si la quantité A est nulle, le produit de cette quantité par le nombre m est aussi nul. Réciproquement,

toute valeur de x qui satisfait à la seconde équation satisfait aussi à la première; car, si le produit mA est nul, il faut que l'un des deux facteurs le soit; mais le nombre donné m n'est pas nul; donc l'autre facteur A est nécessairement nul. Les deux équations, admettant les mêmes solutions, sont équivalentes.

De même, si l'on divise tous les termes par un même nombre m, on transforme l'équation proposée en une autre

$$\frac{A}{m} = 0$$

équivalente.

83. Remarque. Pour la rigueur du raisonnement, il importe que le multiplicateur m ne soit ni nul ni infini, et pour cela il faut que ce multiplicateur ne contienne pas l'inconnue. Supposons, par exemple, que l'on ait multiplié par $x - 2$; l'équation

$$(x - 2)A = 0$$

admet bien toutes les solutions de l'équation $A = 0$; mais elle admet en outre la solution $x = 2$, qui annule le multiplicateur. Ainsi, la seconde équation n'est pas équivalente à la première, puisque, outre les solutions de la première, elle en admet encore une autre.

On voit comment la multiplication par une quantité contenant l'inconnue introduit dans l'équation des solutions étrangères à la question. Quand une semblable opération sera nécessaire, on tiendra compte de cette circonstance, et parmi les solutions trouvées, on distinguera celles qui satisfont réellement à l'équation proposée.

Au contraire, la division par une quantité contenant l'inconnue peut faire disparaître une ou plusieurs solutions de l'équation.

84. Corollaire. *On fait disparaître les dénominateurs*

d'une équation en multipliant tous les termes de l'équation par le plus petit multiple des dénominateurs.

Soit l'équation

$$\frac{7x}{8} - \frac{3}{4} = \frac{1}{6} + \frac{5x}{12}.$$

Le plus petit multiple de tous les dénominateurs est 24. Si nous multiplions tous les termes de l'équation par 24, il est clair que les dénominateurs disparaissent; l'équation devient

$$21x - 18 = 4 + 10x.$$

Pour faire cette multiplication, on multiplie le numérateur de chaque terme par le quotient du plus petit multiple par le dénominateur, et l'on ôte ce dénominateur; ainsi nous avons multiplié les numérateurs par les quotients 3, 6, 4, 2 du plus petit multiple 24 par les différents dénominateurs.

Si l'équation ne contient qu'un seul dénominateur, on multiplera par ce dénominateur.

Si l'on éprouve quelque difficulté à trouver le plus petit multiple, on multipliera par le produit des dénominateurs, qui est un multiple commun.

85. Nous pouvons énoncer maintenant la règle à suivre pour résoudre une équation du premier degré à une inconnue: 1° *on chasse les dénominateurs s'il y en a;* 2° *on fait passer les termes inconnus dans le premier membre, les termes connus dans le second membre, et l'on réduit les uns et les autres;* 3° *enfin on divise par le coefficient de l'inconnue.*

Reprenons l'équation

$$\frac{7x}{8} - \frac{3}{4} = \frac{1}{6} + \frac{5x}{12}.$$

Chassons d'abord les dénominateurs, cette équation devient

$$21x - 18 = 4 + 10x.$$

Ensuite, faisons passer les termes inconnus dans le premier membre, les termes connus dans le second, nous avons

$$21x - 10x = 4 + 18,$$

ou, en réduisant,

$$11x = 22.$$

Enfin, divisons par 11, il vient

$$x = \frac{22}{11} = 2.$$

On voit que la méthode consiste à transformer l'équation proposée en une série d'équations équivalentes, jusqu'à ce que l'on arrive à une équation de la forme $x = 2$. Mais cette dernière équation est évidemment satisfaite, si l'on donne à l'inconnue la valeur 2, et ne l'est par aucune autre valeur; donc l'équation proposée, qui est équivalente à cette dernière, admet la solution $x = 2$ et n'en admet aucune autre.

86. Considérons encore l'équation

$$\frac{x}{4} + 7 = \frac{2x}{3} - 3,$$

que nous avons déjà résolue (nº 9). Les deux dénominateurs étant premiers entre eux, leur plus petit multiple est leur produit; on multipliera donc par 12, ce qui donne

$$3x + 84 = 8x - 36.$$

On en déduit, par la transposition des termes,

$$3x - 8x = -36 - 84,$$

$$-5x = -120,$$

et, en changeant les signes des deux membres,

$$5x = 120,$$

d'où

$$x = \frac{120}{5} = 24.$$

Résolution de deux équations du premier degré à deux inconnues.

87. Si l'on n'avait qu'une équation à deux inconnues x et y, l'équation admettrait une infinité de solutions ; car on pourrait donner à x une valeur quelconque, et il en résulterait pour y une valeur correspondante. La question serait donc indéterminée.

Soit, par exemple, l'équation

$$5x - 3y = 9,$$

qui, résolue par rapport à y, devient

$$y = \frac{5x - 9}{3}.$$

Si l'on donne à x les valeurs 2, 3, 4, ..., on trouve pour y les valeurs $\frac{1}{3}$, 2, $\frac{11}{3}$........ Ainsi l'équation est satisfaite par les systèmes de valeurs

$$x = 2, \quad y = \frac{1}{3},$$
$$x = 3, \quad y = 2,$$
$$x = 4, \quad y = \frac{11}{3},$$

. . . .

. . . .

Chacun d'eux constitue une solution de l'équation proposée et il y en a une infinité.

Les théorèmes I et II, et les transformations qui en résultent, sont vrais d'une manière générale et s'appliquent à une équations à plusieurs inconnues. Mais alors il faut entendre par équation équivalentes deux équations qui admettent les mêmes solutions en nombre infini.

Si l'on a deux équations simultanées à deux inconnues,

l'indétermination disparaît ; on ne peut plus prendre x arbitrairement ; car il faut que les valeurs de x et de y satisfassent à la fois aux deux équations.

88. Parmi les diverses méthodes employées pour effectuer cette résolution, l'une des meilleures et des plus usitées est celle dite de ***substitution***. Nous l'avons déjà fait connaître dans l'introduction (nº 21). *Elle consiste à tirer de l'une des deux équations proposées la valeur de l'une des inconnues comme si l'autre était connue, et à substituer cette valeur dans l'autre équation ;* on obtient ainsi une équation à une inconnue que l'on résout par le procédé ordinaire.

Soient les deux équations simultanées

$$(1) \qquad 5x - 3y = 9,$$
$$(2) \qquad 7x + 11y = 43,$$

que nous numérotons, afin d'abréger le discours. De la première tirons la valeur de y, comme si la valeur de x était connue, nous avons

$$(3) \qquad y = \frac{5x - 9}{3}.$$

Substituons cette expression à la place de y dans la seconde équation, nous obtiendrons une équation à une inconnue

$$(4) \qquad 7x + 11\frac{5x - 9}{3} = 43.$$

Cette équation, résolue par le procédé habituel, nous donne $x = 3$. En portant cette valeur dans l'expression (3) de y, nous trouvons $y = 2$. Telles sont les valeurs des deux inconnues.

89. Il est aisé de voir que cette méthode remplace le système des deux équations proposées (1) et (2) par le système équivalent des deux équations (3) et (4). En effet, nous remarquons d'abord que l'équation (3) n'est autre que

l'équation (1) transformée. Si donc, pour certaines valeurs de x et de y, les équations (1) et (2) sont satisfaites, l'équation (3), qui est la même que l'équation (1), le sera évidemment, et aussi l'équation (4), qui ne diffère de l'équation (2) qu'en ce que la quantité y a été remplacée par une quantité égale $\frac{5x-9}{3}$. Réciproquement, si, pour certaines valeurs de x et de y, les équations (3) et (4) sont satisfaites, l'équation (1), qui est la même que l'équation (3), le sera évidemment, et aussi l'équation (2) qui ne diffère de l'équation (4) qu'en ce que la quantité $\frac{5x-9}{3}$ a été remplacée par la quantité égale y. Les deux systèmes d'équations admettent donc les mêmes solutions, et par conséquent sont équivalents.

Mais l'équation (4), transformée, devient

$$x = 3.$$

On peut donc remplacer le système proposé par le système équivalent

(3) $$y = \frac{5x-9}{3},$$

(5) $$x = 3.$$

L'équation (5) n'est satisfaite que par la valeur $x=3$; pour satisfaire en même temps à l'équation (3), il faut donner à y la valeur 2. Ainsi ce dernier système d'équations, et par conséquent le système proposé, admet la solution $x=3$, $y=2$, et n'en admet pas d'autre.

Exemples.

90. Dans la pratique, on profitera de toutes les circonstances qui permettent de simplifier le calcul.

1° Résoudre les deux équations

$$7y - 4x = 2,$$
$$5y + 4x = 22.$$

Les deux coefficients de x étant les mêmes, on tirera de la première équation la valeur de x,

$$x = \frac{7y - 2}{4},$$

l'on substituera dans la seconde, ce qui donne

$$5y + 4\frac{7y - 2}{4} = 22.$$

e dénominateur 4 disparaît de lui-même, et l'équation s'écrit plus simplement

$$5y + 7y - 2 = 22,$$

d'où l'on déduit

$$y = 2,$$

et, en portant cette valeur dans l'expression de x,

$$x = 3.$$

2° Résoudre les deux équations

$$17x - 10y = 11,$$
$$13x - 5y = 19.$$

Le coefficient de y, dans la première équation, étant un multiple de coefficient de y dans la seconde, on tirera de celle-ci la valeur de y

$$y = \frac{13x - 19}{5},$$

que l'on substituera dans la première, ce qui donne

$$17x - 10\frac{13x - 19}{5} = 11.$$

ou, plus simplement,

$$17x - 2(13x - 19) = 11.$$

On en déduit

$$x = 3, \qquad y = 4.$$

3° Résoudre les équations

$$8x - 11y = 1,$$
$$19y - 12x = 11.$$

Les deux coefficients de x ayant un commun diviseur, de la première équation on tirera

$$x = \frac{1 + 11y}{8},$$

et l'on substituera dans la seconde, ce qui donne

$$19y - 12\,\frac{1 + 11y}{8} = 11.$$

Si l'on divise par 4 les deux termes de la fraction, cette équation se simplifie et devient

$$19y - 3\,\frac{1 + 11y}{2} = 11.$$

On en déduit

$$y = 5, \qquad x = 7.$$

Résolutions de trois équations du premier degré à trois inconnues.

91. La marche à suivre est toujours la même : *de l'une des trois équations proposées on tirera la valeur de l'une des inconnues, comme si les valeurs des deux autres étaient connues, et l'on substituera cette valeur dans les deux autres équations.* On obtiendra ainsi deux équations à deux inconnues que l'on résoudra par le procédé indiqué précédemment.

Soient les trois équations

(1) $$5y - 7x + 3z = 4,$$
(2) $$4x + 9y - 5z = 30,$$
(3) $$2x - 3y + 6z = 1.$$

Si de la première on tire

(4) $$z = \frac{4 + 7x - 5y}{3},$$

et, que l'on substitue dans les deux autres, on a les deux équations à deux inconnues

(5) $$4x + 9y - 5\frac{4 + 7x - 5y}{3} = 30,$$

(6) $$2x - 3y + 6\frac{4 + 7x - 5y}{3} = 1,$$

qui simplifiées, deviennent

$$52y - 23x = 110,$$
$$13y - 16x = 7.$$

La question est ramenée ainsi à la résolution de deux équations à deux inconnues. Si de la dernière on tire

(7) $$y = \frac{7 + 16x}{13},$$

et que l'on substitue dans la précédente, on a l'équation à une inconnue

(8) $$52\frac{7 + 16x}{13} - 23x = 110,$$

ou, plus simplement,

$$4(7 + 16x) - 23x = 110.$$

Cette dernière équation, résolue, donne $x = 2$. Portant cette valeur dans l'équation (7), on en déduit $y = 3$; portant ces deux valeurs dans l'équation (4), on a enfin $z = 1$. Telles sont les valeurs des trois inconnues.

92. Il est aisé de voir que la méthode transforme le système des trois équations proposées dans le système équivalent des trois équations (4), (5) et (6). En effet, l'équation (4) est la même que l'équation (1), et l'on déduit les équations (5) et (6) des équations (2) et (3) en remplaçant z par une quantité égale, ou réciproquement.

Mais le système des deux équations (5) et (6) peut être remplacé à son tour par le système équivalent des deux équations (7) et (8), et cette dernière, résolue, devient

$x=2$. Ainsi, le système des trois équations proposées est transformé dans le système équivalent

$$(4)\qquad z=\frac{4+7x-5y}{3},$$

$$(7)\qquad y=\frac{7+16x}{13},$$

$$(9)\qquad x=2.$$

La dernière équation n'est satisfaite que par la valeur $x=2$; pour satisfaire en même temps à la seconde, il faut donner à y la valeur 3, et pour satisfaire à la première, il faut donner à z la valeur 1. Ainsi ce dernier système, et par conséquent le système proposé, admet la solution

$$x=2,\qquad y=3,\qquad z=1,$$

et n'en admet pas d'autre.

Exemples.

93. Dans chaque cas particulier, on dirigera les calculs de manière à les simplifier autant que possible.

1° Résoudre les trois équations

$$\begin{aligned} x+y+z&=6,\\ x+2y+3z&=10,\\ x+4y+9z&=20. \end{aligned}$$

Si de la première on tire

$$x=6-y-z,$$

et que l'on substitue dans les deux autres, on a les deux équations à deux inconnues

$$\begin{aligned} 6-y-z+2y+3z&=10,\\ 6-y-z+4y+9z&=20, \end{aligned}$$

qui, simplifiées, deviennent

$$\begin{aligned} y+2z&=4,\\ 3y+8z&=14. \end{aligned}$$

On résoudra ces deux équations en tirant de la première

$$y = 4 - 2z,$$

et, substituant dans la seconde, ce qui donne

$$3(4 - 2z) + 8z = 14,$$

d'où

$$z = 1.$$

Portant cette valeur dans l'expression de y, on trouve $y = 2$; portant ces deux valeurs dans l'expression de x, on a $x = 3$.

2° Résoudre les trois équations

$$\begin{aligned} 5x - 7y &= 2, \\ 4y - 3z &= 1, \\ 2x - z &= 7. \end{aligned}$$

Les trois inconnues n'entrent pas dans chacune des trois équations et le calcul est plus simple. Si de la troisième équation on tire

$$z = 2x - 7,$$

et que l'on substitue dans la seconde, on a

$$4y - 3(2x - 7) = 1,$$

plus simplement

$$6x - 4y = 20,$$

ou

$$3x - 2y = 10.$$

Cette équation, jointe à la première qui ne contient pas z, forme un système de deux équations à deux inconnues

$$\begin{aligned} 5x - 7y &= 2, \\ 3x - 2y &= 10. \end{aligned}$$

Si de la dernière on tire

$$y = \frac{3x - 10}{2},$$

et que l'on substitue dans la précédente, on a l'équation à une inconuue

$$5x - 7\frac{3x - 10}{2} = 2.$$

On déduit de là

$$x=6, \qquad y=4, \qquad z=5.$$

3° Résoudre les trois équations

$$\begin{aligned} 8x - 3y &= 47, \\ 3x + 2y - 2z &= 19, \\ 2x + 3z - 3y &= 17. \end{aligned}$$

Si de la seconde équation on tire

$$z=\frac{3x+2y-19}{2},$$

et que l'on substitue dans la troisième, on a l'équation

$$2x+3\,\frac{3x+2y-19}{2}-3y=17,$$

qui, simplifiée, se réduit à

$$13x=91.$$

Cette équation donne immédiatement $x=7$. La valeur de x étant connue, on tirera de la première équation $y=3$; en portant ces deux valeurs dans l'expression de z, on aura $z=4$.

Résolution d'un nombre quelconque d'équations du premier degré.

94. La méthode de substitution, que nous avons employée pour deux et pour trois équations, s'applique sans difficulté à un plus grand nombre d'équations. Supposons que l'on ait à résoudre n équations à n inconnues. De la première équation on tirera la valeur de la première inconnue que l'on substituera dans toutes les autres équations, ce qui donnera $n-1$ équations à $n-1$ inconnues, qui, jointes à la première, formeront un système équivalent au système proposé. De la seconde équation de ce second système, on tirera de même la valeur de la seconde inconnue que l'on substituera

dans toutes les suivantes ; et le système proposé sera transformé en un système équivalent composé, d'une équation à n inconnues, d'une à $n-1$ inconnues, et de $n-2$ équations à $n-2$ inconnues. On continuera de la même manière jusqu'à ce que l'on arrive à une équation à une inconnue, et alors le système des n équations sera transformé en un système équivalent de n équations, contenant, la première les n inconnues, la seconde $n-1$, la troisième $n-2, \ldots$, enfin la dernière une seule inconnue. De cette équation, on déduira la valeur de la dernière inconnue, et en remontant de proche en proche, on trouvera successivement les valeurs de toutes les inconnues.

Appliquons cette méthode à la résolution de quatre équations à quatre inconnues.

$$(1)\qquad \begin{cases} x - 2y + z - 3u = 1, \\ 7y - 2x - 4z + 12u = 4, \\ 3x + y - 3z + u = 9, \\ 2z - x - y + 7u = 6. \end{cases}$$

De la première équation tirons la valeur de x, substituons-la dans toutes les autres et simplifions, nous transformerons le système des équations proposées en un autre équivalent

$$(2)\qquad \begin{cases} x = 1 + 2y - z + 3u, \\ 3y - 2z + 6u = 6, \\ 7y - 6z + 10u = 6, \\ 3z - 3y + 4u = 7. \end{cases}$$

De la seconde équation de ce second système tirons la valeur de y et substituons-la dans les deux suivantes, nous obtenons le troisième système

$$(3)\qquad \begin{cases} x = 1 + 2y - z + 3u, \\ y = \dfrac{6 + 2z - 6u}{3}, \\ z + 3u = 6, \\ z + 10u = 13. \end{cases}$$

Si de la troisième équation de ce troisième système nous tirons la valeur de z pour la substituer dans la dernière équation, nous arriverons enfin au système

$$(4)\quad \begin{cases} x = 1 + 2y - z + 3u, \\ y = \dfrac{6 + 2z - 6u}{3}, \\ z = 6 - 3u, \\ u = 1. \end{cases}$$

En remontant de proche en proche, on trouve

$$u = 1, \qquad z = 3, \qquad y = 2, \qquad x = 5.$$

Exemples.

95. Dans un grand nombre de cas, on abrége beaucoup les calculs en dirigeant convenablement les substitutions.

1° Résoudre les cinq équations à cinq inconnues

$$\begin{cases} y + 2x = 4, \\ z + 3y = 9, \\ u + 4z = 16, \\ v + 5u = 25, \\ x + y + z + u + v = 15. \end{cases}$$

On tire de la première

$$y = 4 - 2x;$$

de la seconde, en y remplaçant y par sa valeur,

$$z = 6x - 3;$$

de la troisième, en y remplaçant z par sa valeur,

$$u = 28 - 24x;$$

de la quatrième, en y remplaçant u par sa valeur,

$$v = 120x - 115.$$

Les quatre inconnues y, z, u, v sont exprimées ainsi au moyen de x; si l'on substitue ces valeurs dans la cinquième

équation, on obtiendra une équation à une seule inconnue

$$101x = 101,$$

d'où

$$x = 1,$$

En portant cette valeur de x dans les expressions précédentes, on trouve

$$y = 2, \quad z = 3, \quad u = 4, \quad v = 5.$$

2° Résoudre les quatre équations à quatre inconnues

$$\left\{ \begin{array}{l} x + 5z = 29, \\ 3y - 2x + u = 5, \\ 4u - 3z = 13, \\ 9x - 7y - 2u = 8. \end{array} \right.$$

Si de la première et de la troisième on tire

$$x = 29 - 5z,$$
$$u = \frac{13 + 3z}{4},$$

et que l'on substitue ces valeurs dans les deux autres, on aura deux équations à deux inconnues

$$12y + 43z = 239,$$
$$14y + 93z = 493.$$

Si de la première de ces deux équations on tire

$$y = \frac{239 - 43z}{12},$$

et que l'on substitue dans la seconde, on obtient une équation à une inconnue

$$257z = 1285,$$

d'où

$$z = 5.$$

En portant cette valeur dans les expressions précédentes on trouve

$$y = 2, \quad u = 7, \quad x = 4.$$

Combinaison des équations.

96. Souvent une combinaison des équations proposées facilite beaucoup la résolution. Exemples :

1° Trouver deux nombres, connaissant leur somme a et leur différence b.

En appelant x et y les deux nombres cherchés, on a les deux équations

$$x + y = a,$$
$$x - y = b.$$

Ajoutons ces deux équations membre à membre, nous aurons

$$2x = a + b,$$

d'où

$$x = \frac{a + b}{2}.$$

Retranchons la seconde équation de la première, nous aurons de même

$$y = \frac{a - b}{2}.$$

2° Trouver quatre nombres, connaissant leurs sommes trois à trois. On aura à résoudre les quatre équations

$$y + z + u = a,$$
$$z + u + x = b,$$
$$u + x + y = c,$$
$$x + y + z = d.$$

En ajoutant ces quatre équations membre à membre, on a

$$3x + 3y + 3z + 3u = a + b + c + d;$$

d'où l'on déduit la somme des quatre inconnues

$$x + y + z + u = \frac{a + b + c + d}{3}.$$

Si maintenant de cette nouvelle équation on retranche

chacune des équations proposées, on trouve immédiatement les valeurs des inconnues

$$x = \frac{a+b+c+d}{3} - a,$$

$$y = \frac{a+b+c+d}{3} - b,$$

$$z = \frac{a+b+c+d}{3} - c,$$

$$u = \frac{a+b+c+d}{3} - d.$$

3° Trouver quatre nombres, connaissant l'excès de la somme de trois quelconques d'entre eux sur le quatrième.

On aura à résoudre les quatre équations

$$y + z + u - x = a,$$
$$z + u + x - y = b,$$
$$u + x + y - z = c,$$
$$x + y + z - u = d,$$

En ajoutant ces quatre équations, on a l'équation

$$2x + 2y + 2z + 2u = a + b + c + d,$$

d'où l'on déduit la somme des inconnues

$$x + y + z + u = \frac{a+b+c+d}{2}.$$

Si maintenant de cette nouvelle équation on retranche chacune des équations proposées, on trouve

$$2x = \frac{a+b+c+d}{2} - a,$$

$$2y = \frac{a+b+c+d}{2} - b,$$

. . . .

. . . .

d'où

$$x=\frac{a+b+c+d}{4}-\frac{a}{2},$$
$$y=\frac{a+b+c+d}{4}-\frac{b}{2},$$
. . . .
. . . .

4° Résoudre les quatre équations

$$x+2y+3z+4u=a,$$
$$y+2z+3u+4x=b,$$
$$z+2u+3x+4y=c,$$
$$u+2x+3y+4z=d.$$

En ajoutant ces quatre équations, on obtient une équation

$$10x+10y+10z+10u=a+b+c+d,$$

qui donne la somme des quatre inconnues

$$x+y+z+u=\frac{a+b+c+d}{10}.$$

Pour abréger, nous désignerons par la lettre m le second membre qui est connu.

En retranchant la seconde équation de la première, la troisième de la seconde, la quatrième de la troisième, la première de la quatrième, on obtient les équations

$$y+z+u-3x=a-b,$$
$$z+u+x-3y=b-c,$$
$$u+x+y-3z=c-d,$$
$$x+y+z-3u=d-a.$$

Mais nous avons trouvé

$$x+y+z+u=m.$$

Si donc de cette dernière équation on retranche chacune

des précédentes, on obtient les valeurs des inconnues

$$x=\frac{m-a+b}{4},$$
$$y=\frac{m-b+c}{4},$$
$$z=\frac{m-c+d}{4},$$
$$u=\frac{m-d+a}{4}.$$

97. La méthode dont nous venons de faire quelques applications repose sur le théorème suivant, dont on se sert fréquemment en mathématiques.

THÉORÈME III. ***Étant données plusieurs équations, on peut remplacer l'une d'elles par l'équation que l'on obtient en ajoutant ou en retranchant les équations proposées membre à membre.***

Considérons d'abord deux équations

$$A=0, \tag{1}$$
$$B=0, \tag{2}$$

que l'on peut toujours mettre sous cette forme, en faisant passer tous les termes dans le premier membre. Si on les ajoute membre à membre, on forme une nouvelle équation

$$A+B=0, \tag{3}$$

qui peut remplacer l'une des équations combinées, par exemple la deuxième, et le système des deux équations

$$A=0, \tag{1}$$
$$A+B=0 \tag{3}$$

sera équivalent au système des deux équations proposées. En effet, si, pour de certaines valeurs des inconnues, les équations (1) et (2) sont satisfaites, l'équation (3) le sera aussi; car les deux quantités A et B devenant nulles, leurs somme A + B est aussi nulle. Réciproquement, si les deux équations (1) et (3) sont satisfaites, l'équation (2) le sera

aussi ; car la somme $A + B$ étant nulle, ainsi que la première partie A, il est nécessaire que la seconde partie B le soit aussi. Les deux systèmes, admettant les mêmes solutions, sont équivalents.

De même si, au lieu d'ajouter, on retranche les équations membre à membre, on obtient un système

$$A = 0,$$
$$A - B = 0,$$

équivalent au système proposé.

98. Corollaire. Avant d'ajouter ou de retrancher les équations proposées, on peut multiplier les deux membres de chacune d'elles par un nombre arbitraire ; car on sait que, lorsqu'on multiplie tous les termes d'une équation par un même nombre, l'équation reste équivalente à elle-même. Si donc, avant d'ajouter, nous multiplions la première équation par m, la seconde par n, nous obtiendrons le système

$$A = 0,$$
$$mA + nB = 0,$$

équivalent au système proposé.

Ceci donne le moyen d'éliminer une inconnue entre deux équations ; il suffit pour cela de multiplier les deux équations par des nombres tels, que les deux coefficients de l'inconnue qu'on veut éliminer deviennent égaux entre eux, puis d'ajouter ou de retrancher, suivant qu'ils ont des signes contraires ou le même signe.

Soient, par exemple, les deux équations

$$11x - 3y = 10,$$
$$9x + 5y = 38.$$

Si nous multiplions la première par 5, la seconde par 3, ces deux équations deviennent

$$55x - 15y = 50,$$
$$27x + 15y = 114.$$

Si maintenant on ajoute membre à membre, l'inconnue y disparaît, et l'on obtient une équation à une inconnue

$$82x = 164,$$

d'où

$$x = 2.$$

En remplaçant x par sa valeur dans l'une des deux équations proposées, et résolvant par rapport à y, on trouve $y = 4$.

Ce procédé d'élimination, que l'on appelle méthode de *réduction* au même coefficient, réussit toujours quand on multiplie la première équation par le coefficient de l'inconnue qu'on veut éliminer dans la seconde équation, et la seconde équation par le coefficient de la même inconnue dans la première; car, après cette opération, l'inconnue dont il s'agit a dans les deux équations un coefficient égal au produit des deux coefficients primitifs. Mais il suffira, si l'on aperçoit aisément le plus petit multiple des deux coefficients, de rendre ces deux coefficients égaux à ce plus petit multiple.

Soient les deux équations

$$4x + 7y = 27,$$
$$6x - 13y = 17.$$

On voit de suite que les deux coefficients de x ont pour plus petit multiple 12; pour éliminer x, on multipliera la première équation par 3, la seconde par 2; les deux équations deviennent

$$12x + 21y = 81.$$
$$12x - 26y = 34.$$

Puis on retranchera la seconde équation de la première, ce qui donne

$$47y = 47,$$

d'où

$$y = 1.$$

En portant cette valeur de y dans la première équation et résolvant, on trouve $x = 5$.

99. Le théorème que nous avons démontré s'étend sans difficulté à un nombre quelconque d'équations.

Soient les trois équations

$$(1) \qquad A = 0,$$
$$(2) \qquad B = 0,$$
$$(3) \qquad C = 0.$$

Si on les ajoute membre à membre, on forme une nouvelle équation

$$(4) \qquad A + B + C = 0,$$

qui peut remplacer l'une des équations combinées, par exemple la troisième, et l'on obtient ainsi un système

$$(1) \qquad A = 0,$$
$$(2) \qquad B = 0,$$
$$(4) \qquad A + B + C = 0,$$

équivalent au système proposé.

Il est évident en effet que, lorsque les trois équations (1), (2), (3) sont satisfaites, l'équation (4) l'est aussi, et que réciproquement, lorsque les équations (1), (2), (4), sont satisfaites, l'équation (3) l'est pareillement.

CHAPITRE II.

UTILITÉ DES QUANTITÉS NÉGATIVES DANS LA RÉSOLUTION DES PROBLÈMES.

---

100. Nous avons dit (nº 33) qu'un polynôme indique une série d'additions et de soustractions à effectuer, et nous avons appelé quantités *positives* les quantités à ajouter, quantités *négatives* les quantités à retrancher. Un polynôme se résumant finalement en une quantité à ajouter ou à retrancher, il a, dans le premier cas une valeur positive, dans le second cas une valeur négative.

Nous avons généralisé les opérations algébriques de manière à les appliquer indistinctement aux polynômes, soit positifs, soit négatifs, et nous avons étendu les mêmes règles ou définitions aux termes considérés isolément, ce qui permet dans les calculs de remplacer les polynômes par leurs valeurs. Il est résulté de là un perfectionnement notable dans le mécanisme du calcul et dans la transformation des expressions algébriques, en ce sens que toute restriction a disparu, et qu'il n'y a pas à s'inquiéter de savoir si les valeurs des polynômes sur lesquelles on opère sont positives ou négatives.

La considération des quantités positives ou négatives n'est pas moins utile dans la résolution des problèmes. Elle permet, comme nous le verrons, de comprendre dans les mêmes équations, et par suite dans les mêmes formules, les différents cas d'une même question.

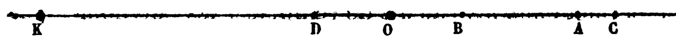
101. Problème I. *Un mobile, partant d'un point donné,*

parcourt sur une droite successivement plusieurs longueurs données. On demande à quelle distance il se trouve finalement du point de départ.

La question présente plusieurs cas différents, suivant que chacune des longueurs est parcourue dans un sens ou dans l'autre. Lorsque toutes les longueurs sont parcourues dans le même sens à la suite les unes des autres, elles s'ajoutent évidemment; si donc on appelle a, b, c, d ces diverses longueurs que, pour préciser, nous supposerons au nombre de quatre, et x la distance à laquelle le mobile se trouve finalement du point de départ, on aura la formule

$$x = a + b + c + d.$$

Grâce à la considération des quantités positives ou négatives, cette formule peut être étendue à tous les autres cas. En effet, soit O le point de départ du mobile sur la droite donnée; prenons vers la gauche un point K situé à une distance arbitraire m du point O, mais assez grande pour que le mobile reste toujours à sa droite, et proposons-nous d'éva-



luer à chaque instant la distance du mobile à ce point fixe K. Au moment du départ, le mobile est en O, à la distance m du point K; il parcourt ensuite diverses longueurs OA, AB, BC, CD dans un sens ou dans l'autre; il est clair que chaque longueur parcourue de gauche à droite, l'éloignant du point K, devra être ajoutée, et par conséquent regardée comme positive, et que chaque longueur parcourue en sens contraire, c'est-à-dire de droite à gauche, le rapprochant du point K, devra être retranchée, et par conséquent regardée comme négative. Si donc on représente par les lettres a, b, c, d les longueurs données, affectées chacune

du signe + ou du signe —, suivant qu'elle est parcourue de gauche à droite ou en sens contraire, la distance finale du mobile au point K sera exprimée par la formule

$$m + a + b + c + d.$$

Supposons maintenant que le mobile aille directement du point O au point D, et désignons par x la longueur OD, affectée du signe + ou du signe — suivant qu'elle est parcourue de gauche à droite ou de droite à gauche, la distance finale du mobile au point K sera exprimée aussi par $m + x$. On aura donc

$$m + x = m + a + b + c + d.$$

Si l'on retranche la quantité m de part et d'autre, il vient

$$(1) \quad x = a + b + c + d.$$

Lorsque le polynôme aura une valeur positive, la distance x, devant être ajoutée à m, sera comptée à partir du point O vers la droite; lorsque le polynôme aura une valeur négative, la distance x, devant être retranchée de m, sera comptée à partir du point O vers la gauche.

Supposons, par exemple, que le mobile parcoure une première longueur OA de 5 mètres de gauche à droite, une seconde AB de 3 mètres en sens contraire, une troisième BC de 4 mètres de gauche à droite, et enfin une quatrième CD de 8 mètres en sens inverse; affectant chacune d'elles du signe convenable, on fera

$$a = +5, \quad b = -3, \quad b = +4, \quad d = -8.$$

La formule générale (1) indique qu'il faut faire la somme algébrique des quantités représentées par les lettres a, b, c, d; or, on sait que l'addition algébrique consiste à écrire les quantités avec leurs signes; on aura donc, en remplaçant

les lettres par leurs valeurs,

$$x = 5 - 3 + 4 - 8 = -2.$$

Cette valeur -2 signifie qu'il faut de la distance m retrancher 2 mètres; ainsi le point d'arrivée D sera à 2 mètres du point de départ O vers la gauche.

102. PROBLÈME II. *On connaît l'âge d'un père et celui de son fils, et l'on demande à quelle époque l'âge du père sera ou a été triple de l'âge du fils.*

Appelons a l'âge actuel du père, b l'âge du fils, le rapport actuel de l'âge du père à l'âge du fils est $\frac{a}{b}$. On sait que lorsqu'on augmente d'une même quantité les deux termes d'une fraction plus grande que l'unité, la fraction diminue; donc, si le rapport des âges est actuellement plus grand que 3, il arrivera un moment où il sera égal à 3; mais s'il est actuellement plus petit que 3, il a été autrefois égal à 3. Ainsi la question présente deux cas bien distincts, suivant que l'époque cherchée est dans l'avenir ou dans le passé. Dans le premier cas, il faudra ajouter aux âges actuels un certain nombre d'années; dans le second cas, en retrancher un certain nombre d'années. Si donc on désigne par la lettre x ce nombre d'années, affecté du signe $+$ ou du signe $-$, suivant qu'il doit être ajouté ou retranché, l'équation

$$\frac{a + x}{b + x} = 3$$

conviendra à tous les cas de la question. On en déduit la formule

$$x = \frac{a - 3b}{2}.$$

A l'inspection de cette formule, on reconnaît en effet que, si a est plus grand que $3b$, c'est-à-dire si l'âge du père est

actuellement plus grand que trois fois l'âge du fils, l'inconnue x a une valeur positive, et que, dans le cas contraire, elle a une valeur négative.

Pour montrer une application de cette formule, supposons que le père ait 40 ans, le fils 10 (n° 12). En remplaçant a et b par leurs valeurs, on trouve

$$x = +5.$$

Cette valeur positive indique qu'il faut ajouter 5 ans aux âges actuels; ainsi l'âge du père sera dans 5 ans triple de l'âge du fils. Et, en effet, à cette époque le père aura 45 ans et le fils 15, et 45 est bien le triple de 15.

Supposons maintenant que le père ait actuellement 45 ans, le fils 17. La formule donne

$$x = -3.$$

Cette valeur négative indique qu'il faut retrancher 3 ans des âges actuels; ainsi l'âge du père était, il y a 3 ans, triple de l'âge du fils.

103. Remarque I. Nous voyons par ce qui précède que certaines espèces de grandeurs sont susceptibles d'être comptées dans deux sens, inverses l'un de l'autre. Ainsi, partant d'un point quelconque, on peut marcher sur une ligne dans un sens ou dans le sens opposé. On regardera comme positives les longueurs parcourues dans un sens convenu (par exemple de gauche à droite si la ligne est horizontale), celles portées en sens inverse comme négatives.

On comprend bien la signification de ce double signe affectant les longueurs, si l'on imagine un point K très-éloigné vers la gauche (voyez n° 101), d'où l'on suppose pour un instant que l'on compte les distances; la distance du mobile à cette origine fictive augmentera si la longueur est parcourue de gauche à droite, et diminuera si elle est parcourue en sens contraire.

Le temps présente aussi deux sens opposés. Compté à partir d'un instant quelconque, si l'on en descend le cours, c'est-à-dire si l'on marche vers l'avenir, il sera naturellement affecté du signe +; au contraire, si l'on remonte vers le passé, il sera affecté du signe —. En effet, que l'on imagine une origine fictive très-reculée, le temps, compté à partir de cette origine fictive, sera augmenté dans le premier cas, diminué dans le second cas. Par exemple, dans les calculs qui se rapportent à notre siècle, les astronomes ont coutume de compter le temps à partir du 1er janvier 1800; si l'on marche de 10 ans en avant ou en arrière, on aura un temps représenté par + 10 ou par — 10; et en effet, en rapportant à l'origine ordinaire qui est beaucoup plus reculée, savoir le commencement de l'ère chrétienne, on aurait

$$1800+10 \quad \text{ou} \quad 1800-10.$$

Il en est de même des degrés de température marqués par le thermomètre. Les Français prennent pour origine la température de la glace fondante; c'est là qu'est marqué le zéro. Au-dessus, les degrés sont positifs, au-dessous négatifs. Et, en effet, que l'on imagine une température plus basse que toutes celles que l'on aura à considérer, et que l'on compte les degrés à partir de ce point; à la glace fondante correspondra un certain nombre de degrés m; la température $+5$, ou 5 degrés au-dessus de o, signifie $m+5$; la température -5, ou 5 degrés au-dessous de o, signifie $m-5$.

104. **Problème III.** ***Un mobile, se mouvant uniformément sur une droite avec une vitesse donnée, passe au point O à un certain instant. Déterminer sa position à un instant quelconque.***

En mécanique, on évalue ordinairement les longueurs en

mètres, les temps en secondes, et l'on appelle vitesse l'espace parcouru par le mobile en une seconde.

Supposons d'abord que le mobile marche de gauche à droite avec une vitesse a, et que l'on demande sa position t secondes après qu'il a passé au point O. Le mobile parcourant a mètres par seconde, parcourt $2a$ mètres en 2 secondes, $3a$ mètres en 3 secondes, en général at mètres en t secondes; si donc on appelle x la distance parcourue dans le temps t, on aura l'équation

$$x = at,$$

et cette distance, portée à partir du point O vers la droite, nous donnera la position M du mobile au moment que l'on considère.



Cette formule est générale et convient à tous les cas de la question, si l'on affecte chaque quantité du signe convenable. On demande la position M du mobile, un temps quelconque *après* ou *avant* le moment où le mobile passe au point O; désignons par t ce temps, considéré comme positif dans le premier cas, comme négatif dans le second cas, et par x la distance OM, affectée du signe + ou du signe —, suivant que le point M est à droite ou à gauche du point O. La vitesse a sera elle-même positive ou négative, suivant que le mobile marche de gauche à droite ou en sens contraire; car, si l'on imagine les distances comptées à partir d'un point K très-éloigné vers la gauche, l'espace parcouru en une seconde, ou la vitesse, devra être ajouté dans le premier cas et retranché dans le second cas. Concevons maintenant que l'on compte le temps à partir d'une époque suffisamment reculée, et soit G la position du mobile à cet instant (si la vitesse est positive, le point G est très-loin vers la gauche; si elle est négative, il est au contraire très-loin vers la droite).

Nous pouvons toujours supposer le point K, origine fictive des distances, situé à gauche du point G, et nous appellerons m la distance KG. Désignons par α le temps qui s'écoule depuis l'origine fictive des temps, c'est-à-dire depuis le moment où le mobile est en G, jusqu'au moment où il passe au point O; l'espace GO, parcouru pendant ce temps et affecté du signe convenable, est $a\alpha$. Le temps qui s'écoule depuis cette même origine jusqu'au moment où le mobile vient en M, sera représenté par $\alpha + t$, et l'espace parcouru GM, affecté du signe convenable, par $a(\alpha + t)$. Supposons que le mobile parte du point G, et parcoure successivement les chemins $a\alpha$ et x, ce qui l'amène au point O, puis au point M, il sera finalement à une distance du point K marquée par

$$m + a\alpha + x.$$

Mais, le mobile arrivant au point M après le temps $\alpha + t$, et par conséquent après avoir parcouru l'espace $a(\alpha + t)$ à partir du point G, sa distance au point K est exprimée aussi par $m + a(\alpha + t)$; on a donc l'équation générale

$$m + a\alpha + x = m + a(\alpha + t),$$

ou, plus simplement,

$$x = at.$$

Voici quelques applications de cette formule;

1° Le mobile se meut de gauche à droite avec une vitesse de 10 mètres par seconde; on demande où il sera 6 secondes après avoir passé au point O. On fera $a = +10$, $t = +6$, ce qui donne $x = +60$. Ainsi le mobile sera à 60 mètres à droite du point O, ce qui est évident *à priori*, puisque le mobile marche vers la droite.

2° Le mobile se meut de gauche à droite avec une vitesse de 10 mètres par seconde; on demande où il était 6 secondes avant d'arriver au point O. On fera $a = +10$, $t = -6$, d'où $x = -60$. Ainsi le mobile était à 60 mètres à gauche du point O, ce qui est évident puisque le mobile vient de la gauche.

3° Le mobile se meut de droite à gauche avec une vitesse de 10 mètres par seconde; on demande où il sera 6 secondes après avoir passé au point O. On fera $a = -10$, $t = +6$, ce qui donne $x = -60$. Ainsi le mobile sera à 60 mètres à gauche du point O; ce qui est évident, puisque le mobile marche vers la gauche.

4° Le mobile se meut de droite à gauche avec une vitesse de 10 mètres par seconde; on demande où il était 6 secondes avant d'arriver au point O. On fera $a = -10$, $t = -6$; ce qui donne $x = +60$. Ainsi le mobile était à 60 mètres à droite du point O, ce qui est évident, puisque le mobile vient de la droite.

105. Problème IV. *Deux mobiles, se mouvant uniformément sur une même droite, passent au même instant, le premier au point* A, *le second au point* B. *On connaît la vitesse de chacun d'eux. Trouver la position du point de rencontre de ces deux mobiles.*

Cette question présente plusieurs cas différents, suivant que les mobiles se meuvent dans un sens ou dans l'autre, et que la vitesse du premier est plus grande ou moins grande que celle du second.

Supposons d'abord que les deux mobiles marchent tous deux de gauche à droite, et que le premier, celui qui est à droite au point A, aille moins vite que le second qui est en B.



La rencontre aura évidemment lieu en un certain point M à droite du point A. Appelons a la vitesse du premier mobile, b celle du second, d la distance BA, t le temps inconnu après lequel aura lieu la rencontre, x et y les distances AM et BM des points A et B au point de rencontre M.

Le premier mobile, parcourant a mètres par seconde, parcourra at mètres en t secondes; on a donc l'équation

$$(1) \qquad x = at;$$

de même, le second mobile, parcourant b mètres par seconde, parcourra bt mètres en t secondes, et l'on aura

$$(2) \qquad y = bt.$$

Mais la distance BM ou y devant être égale à BA plus AM, on a la troisième équation

$$(3) \qquad y = d + x.$$

On a ainsi trois équations à trois inconnues t, x, y que l'on résoudra en substituant dans la troisième les valeurs de x et de y données par les deux autres. On en déduit les formules suivantes

$$(4) \quad t = \frac{d}{b - a}, \qquad x = \frac{ad}{b - a}, \qquad y = \frac{bd}{b - a}.$$

Il est aisé de voir que ces trois équations, et par suite les formules qui en résultent, conviennent à tous les cas de la question, si l'on affecte chaque quantité du signe convenable. D'après ce que nous avons dit précédemment, la vitesse de chacun des mobiles sera regardée comme positive ou négative, suivant que ce mobile marchera de gauche à droite ou en sens contraire; les distances x et y, comptées à partir des points A et B, seront positives ou négatives, selon qu'elles seront portées vers la droite ou vers la gauche; le temps t est lui-même positif ou négatif suivant que la rencontre a lieu après ou avant le moment où les deux mobiles passent aux points A et B. De cette manière, et en vertu de la formule établie dans le numéro précédent, on voit que les équations (1) et (2) conviennent à tous les cas de la question. Il en est de même de l'équation (3), si l'on remarque qu'en

partant du point B on arrive au même point M, soit en parcourant la distance y, soit en parcourant successivement les distances d et x.

106. Pour achever de familiariser les élèves avec l'interprétation des quantités positives ou négatives, nous ferons encore quelques applications de ces formules. Supposons la distance BA égale à 120 mètres, c'est-à-dire $d=120$.

1° Les mobiles marchent tous deux de gauche à droite, le premier avec une vitesse de 6 mètres par seconde, le second avec une vitesse de 10 mètres. On fera $a=+6$, $b=+10$, ce qui donne

$$t=+30, \quad x=180, \quad y=300.$$

Ainsi, la rencontre aura lieu après 30 secondes, à droite et à 180 mètres du point A. C'est le cas que nous avons examiné d'abord.

2° Les mobiles marchent tous deux de gauche à droite ; le premier avec une vitesse de 6 mètres par seconde, le second avec une vitesse de 4 mètres. On fera $a=+6$, $b=+4$, ce qui donne

$$t=\frac{120}{-2}=-60, \quad x=-360, \quad y=-240.$$

Ainsi la rencontre a eu lieu il y a 60 secondes, à gauche, et à 240 mètres, du point B. On voit en effet que le premier courrier allant plus vite que le second a dû le dépasser en un certain point situé à gauche du point B.

3° Le premier mobile marche de droite à gauche avec une vitesse de 3 mètres par seconde, le second de gauche à droite avec une vitesse de 5 mètres. On fera $a=-3$, $b=+5$, ce qui donne

$$t=15, \quad x=-45, \quad y=75.$$

Ainsi, la rencontre aura lieu entre les points A et B; ce qui

est évident *à priori*, puisque les deux mobiles marchent à la rencontre l'un de l'autre.

107. Remarque II. Les exemples précédents montrent combien il est utile de représenter par les mêmes lettres des quantités, tantôt positives, tantôt négatives, suivant les différents cas de la question que l'on traite. Cette extension donnée à la signification des lettres ne change rien au mécanisme des opérations algébriques, ni aux transformations servant à la résolution des équations. Voici comment on peut se convaincre de cette vérité importante.

Nous avons appelé expressions équivalentes deux expressions qui donnent le même résultat, quelles que soient les valeurs attribuées aux lettres qui les composent, et nous avons dit, en terminant le ch. IV du livre I (n° 72), qu'une opération algébrique transforme une expression en une autre équivalente. Mais jusqu'alors nous ne donnions aux lettres que des valeurs positives. Il est aisé de voir que l'égalité subsiste quand même on donne aux lettres des valeurs négatives. Soit, par exemple, l'égalité

$$(1) \qquad (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

qui est vraie, quelles que soient les valeurs positives attribuées à a et à b. Si nous changeons le signe de b, d'après la remarque du n° 55, cette égalité se transforme en cette autre

$$(2) \qquad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2,$$

vraie aussi, quelles que soient les valeurs positives attribuées à a et à b. Or, donner à b dans la première égalité une valeur négative -5, c'est la même chose que donner à b la valeur positive $+5$ dans la seconde; la seconde égalité étant satisfaite pour la valeur positive, la première l'est aussi pour la valeur négative. Ainsi, les opérations algébriques transforment les expressions en d'autres équivalentes, quelles que soient les valeurs, positives ou négatives, attribuées aux lettres.

Les transformations que nous avons fait subir à une équation ou à un système d'équations, et les méthodes de résolutions qui en dépendent, doivent être entendues aussi dans le sens le plus général; elles sont vraies, que les valeurs des lettres soient positives ou négatives. Soit, par exemple, l'équation

$$3x + 14 = 6 - x.$$

Si l'on ajoute aux deux membres la quantité x et si l'on retranche 14, cette équation devient

$$3x + x = 6 - 14,$$

ou

$$4x = -8.$$

Or, que la valeur de x soit positive ou négative, on a ajouté aux deux membres de l'équation proposée la même quantité et par conséquent on l'a transformée en une équation équivalente. Cette dernière n'étant satisfaite que si l'on donne à x la valeur négative -2, il en est de même de l'équation proposée. On dit dans ce cas que l'équation admet une *solution négative* $x = -2$.

Considérons encore le système des deux équations

$$5x - 6y = 9.$$
$$8y - 11x = 1.$$

La méthode de substitution le transformera en cet autre

$$y = \frac{5x - 9}{6},$$
$$x = -3,$$

qui lui est équivalent, que les valeurs des inconnues soient positives ou négatives. Mais ce dernier n'est satisfait que par les valeurs négatives $x = -3$, $y = -4$; il en est de même du système proposé.

108. REMARQUE III. Dans une quantité affectée du signe + ou du signe —, il y a lieu de distinguer la valeur *absolue* et la valeur *relative*. La valeur absolue est la quantité, abstraction faite du signe ; la valeur relative la quantité avec son signe. Ainsi, la valeur absolue de la quantité négative — 5 est le nombre 5, la valeur relative est le nombre 5 à retrancher.

On s'est occupé naturellement de la comparaison des valeurs relatives des quantités, positives ou négatives, de même espèce. Une quantité positive, étant une quantité à ajouter, donnera un résultat d'autant plus grand que sa valeur absolue sera plus grande. Au contraire, une quantité négative, étant une quantité à retrancher, donnera un résultat d'autant plus petit que sa valeur absolue sera plus grande. Pour fixer les idées, supposons que la lettre x représente le résultat des opérations d'un négociant dans le courant de la journée (n° 33) ; admettons que le négociant ait en caisse, au commencement de la journée, une somme d'argent suffisamment grande que nous désignerons par m. La fortune du négociant est devenue $m + x$. Il peut arriver que la somme des dépenses égale celle des recettes, alors la valeur de x est zéro, et la fortune du négociant n'a pas changé. Si la valeur de x est positive, la fortune du négociant augmente d'autant plus que la valeur absolue de x est plus grande. Si la valeur de x est négative, la fortune du négociant diminue d'autant plus que la valeur absolue de x est plus grande. Pour abréger le discours, on fait abstraction de la fortune primitive, et l'on considère une quantité positive comme plus grande que zéro, et d'autant plus grande que sa valeur absolue est plus grande, une quantité négative comme plus petite que zéro, et d'autant plus petite que sa valeur absolue est plus grande. Ainsi, on dit que la quantité — 1 est plus petite que 0, la quantité — 2

plus petite que -1, la quantité -3 plus petite que -2,... cela signifie, je le répète, que la quantité $m-1$ est plus petite que m, la quantité $m-2$ plus petite que $m-1$, la quantité $m-3$ plus petite que $m-2$,...

Cette comparaison des valeurs relatives n'est pas moins évidente dans l'échelle des températures marquées par le thermomètre; les nombres positifs indiquent des températures supérieures à la température zéro; les nombres négatifs des températures inférieures; les températures -1, -2, -3,... vont en s'abaissant de plus en plus.

Il en est de même de toutes les sortes de grandeurs susceptibles d'être comptées dans deux sens opposés. Nous avons déterminé (n° 104) la position d'un mobile M sur une droite par sa distance à un point fixe O, en affectant du signe $+$ les distances portées vers la droite, du signe $-$ les distances portées en sens contraire, et nous avons appelé x cette distance affectée du signe convenable. Que l'on imagine maintenant un point K situé très-loin vers la gauche, à une distance m du point O, et que l'on compte les distances à partir de ce point; la position du mobile sera déterminée par la quantité $m+x$. Si le mobile, partant du point O, se meut vers la droite, la valeur de x est positive et va en augmentant de même que la distance $m+x$ à l'origine fictive K. Si le mobile marche vers la gauche, la valeur de x sera négative et ira en augmentant en valeur absolue; mais la distance $m+x$ à l'origine fictive K ira en diminuant. Faisant abstraction de la quantité m, on dira que la valeur relative de x augmente dans le premier cas, diminue dans le second.

Des inégalités.

109. Les théorèmes que nous avons démontrés sur les égalités et les transformations qui en résultent (n°s 79

à 82) s'appliquent aux inégalités, sauf quelques légères modifications.

1° Une inégalité subsiste si à ces deux membres on ajoute une même quantité, ou si de ses deux membres on retranche une même quantité.

Ce que nous venons de dire sur la comparaison des valeurs relatives des quantités positives ou négatives donne à ce théorème un sens tout à fait général. Soit l'inégalité

$$5 > 3, \quad \text{ou} \quad m + 5 > m + 3;$$

des deux membres retranchons 7, nous aurons

$$m - 2 > m - 4, \quad \text{ou} \quad -2 > -4.$$

Il en résulte que l'on peut faire passer un terme d'un membre dans l'autre en changeant son signe.

Mais il n'est pas permis de changer les signes de tous les termes d'une inégalité, ou du moins, si on le fait, il faut changer en même temps le sens de l'inégalité. Soit l'inégalité

$$5 > 3;$$

si on change les signes, on écrira

$$-5 < -3.$$

2° On voit aussi que l'inégalité subsiste si on multiplie ou si on divise les deux membres par un même nombre positif.

Si l'on multipliait ou si l'on divisait par un nombre négatif, il faudrait avoir soin de changer le sens de l'inégalité. Car ceci reviendrait à multiplier par un nombre positif et à changer les signes.

Ces diverses transformations permettent de résoudre une inégalité comme nous avons résolu une équation. Supposons, par exemple, que la quantité x soit assujettie à satisfaire à la condition

$$\frac{7x}{8} - \frac{3}{4} > \frac{1}{6} + \frac{5x}{12}.$$

Si l'on multiplie les deux membres par le nombre positif 24, pour faire disparaître les dénominateurs, cette inégalité devient

$$21x - 18 > 4 + 10x.$$

Si maintenant on fait passer les termes inconnus dans le premier membre, les termes connus dans le second, on a

$$11x > 22,$$

et, en divisant par le nombre positif 11,

$$x > 2.$$

Tous les nombres plus grands que 2 vérifient l'inégalité proposée.

Soit encore l'inégalité

$$3x + 84 > 8x - 36.$$

En faisant passer les termes connus dans le premier membre, les termes inconnus dans le second, on a

$$120 > 5x,$$

ou

$$5x < 120,$$

et, en divisant par le nombre positif 5,

$$x < 24.$$

Toutes les quantités plus petites que 24 vérifient l'inégalité proposée.

CHAPITRE III.

DES CAS D'IMPOSSIBILITÉ ET D'INDÉTERMINATION.

Des cas d'impossibilité.

110. Une équation du premier degré à une inconnue, par des transformations convenables, peut toujours être mise sous la forme

$$ax = b,$$

les lettres a et b désignant des quantités connues; d'où l'on déduit

$$x = \frac{b}{a}.$$

Ainsi une équation du premier degré à une inconnue admet en général une solution, positive ou négative, et n'en admet qu'une.

Il en est de même d'un système de n équations du premier degré à n inconnues; car nous avons vu (nº 94) qu'un pareil système peut être transformé en un système équivalent de n équations renfermant, la première les n inconnues, la deuxième $n - 1$, la troisième $n - 2$....., enfin la dernière une seule inconnue; cette dernière équation donnera en général pour la dernière inconnue une valeur unique et déterminée, et, en remontant ensuite de proche en proche, on trouvera aussi pour chacune des autres inconnues une valeur unique et déterminée.

111. Il peut arriver que dans l'équation

$$ax = b,$$

à laquelle on est conduit en résolvant un système d'équations, le coefficient a de l'inconnue soit nul ; alors la question revient à trouver un nombre qui, multiplié par zéro, donne un produit égal à b, ce qui est impossible ; car le produit d'une quantité quelconque par *zéro* est toujours égal à zéro. Ainsi, dans ce cas, il y a impossibilité de satisfaire à l'équation ou au système d'équations proposé.

Exemples.

1° Trouver un nombre qui, augmenté de son sixième et de 10, et diminué de sa moitié, égale deux fois son tiers augmenté de 8. En désignant par x ce nombre, on a l'équation

$$x + \frac{x}{6} + 10 - \frac{x}{2} = 2\left(\frac{x}{3} + 8\right),$$

qui, simplifiée, devient

$$\frac{2x}{3} + 10 = \frac{2x}{3} + 16,$$

$$0 \times x = 6.$$

L'impossibilité est évidente. Elle se manifeste déjà dans l'équation précédente ; car, si l'on retranche $\frac{2x}{3}$ de part et d'autres, il vient $10 = 16$, ce qui est absurde. Ainsi, il n'existe aucun nombre satisfaisant à la question.

2° Trouver deux nombres tels que le tiers du premier égale la moitié du second moins 1, et que le second égale les deux tiers du premier plus 6. Si l'on appelle x et y ces deux nombres, on a les deux équations

$$\frac{x}{3} = \frac{y}{2} - 1,$$

$$y = \frac{2x}{3} + 6.$$

En substituant dans la première la valeur de y donnée par la seconde, on obtient le système équivalent

$$0 = 2,$$
$$y = \frac{2x}{3} + 6.$$

Il n'existe pas de nombres satisfaisant aux conditions énoncées.

2° Résoudre les deux équations

$$3x - 2y = 10,$$
$$6x - 4y = 17.$$

En substituant dans la seconde la valeur de y tirée de la première, on trouve

$$3 = 0.$$

Ainsi il n'existe pas de nombres satisfaisant à la fois aux deux équations proposées.

L'impossibilité se manifeste sur les équations elles-mêmes; en effet, si l'on multiplie tous les termes de la première par 2, on a

$$6x - 4y = 20,$$
$$6x - 4y = 17.$$

On voit que les deux équations sont *incompatibles;* car les premiers membres sont les mêmes et les seconds membres diffèrent.

Du symbole l'infini.

112. Revenons à l'équation

$$ax = b,$$

et supposons que la valeur absolue du coefficient a soit très-petite; l'inconnue x, donnée par la formule

$$x = \frac{b}{a},$$

sera très-grande en valeur absolue, et, si l'on conçoit que

la valeur absolue du coefficient a diminue jusqu'à zéro, la valeur absolue de x augmentera de manière à devenir plus grande que toute quantité donnée. Par exemple, si l'on donne au coefficient a successivement les valeurs

$$\frac{1}{10}, \quad \frac{1}{100}, \quad \frac{1}{1000}, \quad \frac{1}{10000}, \quad \ldots,$$

le quotient x prendra les valeurs de plus en plus grandes

$$10b, \quad 100b, \quad 1000b, \quad 10000b, \quad \ldots$$

Lorsqu'une quantité augmente ainsi de manière à devenir plus grande que toute quantité donnée, on dit qu'elle devient infinie et on la représente par le signe ∞, qui a la forme d'un huit renversé.

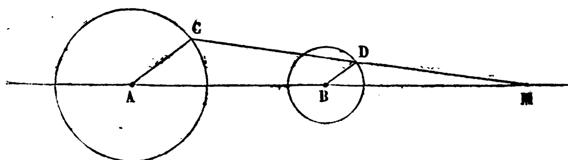
Quand l'une des inconnues d'un problème se présente sous cette forme, il y a évidemment impossibilité; car ce symbole provient de ce que, dans une équation telle que $ax = b$, le coefficient a de l'inconnue est nul.

Reprenons le problème du n° 105, dans le cas où les deux mobiles marchent de gauche à droite, le second allant plus vite que le premier. Si la différence des vitesses $b - a$ est très-petite, les formules donneront pour les inconnues des valeurs positives très-grandes, ce qui indique que la rencontre aura lieu après un temps très-long, et en un point très-éloigné vers la droite. Et, en effet, le second mobile, marchant avec une vitesse très-peu supérieure à celle du premier, ne l'atteindra qu'après un temps très-long. Plus la différence des vitesses sera petite, plus le point de rencontre sera éloigné. Enfin, quand les vitesses deviennent égales, le point de rencontre s'éloigne à l'infini; il y a impossibilité de satisfaire aux équations du problème, et, en effet, les deux mobiles, marchant également vite, restent toujours à la même distance l'une de l'autre et ne se rencontrent jamais

9

Supposons que le second courrier marche un peu moins vite que le premier, les formules donnent pour les inconnues des valeurs négatives très-grandes en valeur absolue; ce qui indique que la rencontre a eu lieu il y a très-longtemps, en un point situé très-loin vers la gauche. Plus la différence $a-b$ des vitesses est petite, plus ce point de rencontre est éloigné. Enfin, quand cette différence devient nulle, le point s'éloigne à l'infini vers la gauche, et il y a impossibilité.

113. REMARQUE I. Dans les questions de géométrie, le symbole l'infini indique ordinairement le parallélisme de deux droites. Proposons-nous, par exemple, la question suivante :



Étant donnés deux cercles, on mène deux rayons parallèles AC, BD; *on joint leurs extrémités; déterminer le point* M *où la droite* CD *rencontre la ligne des centres.*

Appelons a et b les rayons de deux cercles, d la distance des centres AB, x la distance inconnue AM. Les triangles semblables MAC, MBD, donnent la proportion

$$\frac{x}{a}=\frac{x-d}{b},$$

d'où l'on déduit

$$x=\frac{ad}{a-b}.$$

Quand la différence $a-b$ des rayons est très-petite, la valeur de x est très-grande, et le point M très-éloigné. Si cette différence diminue jusqu'à zéro, le point M s'éloigne

à l'infini, et la droite CD devient parallèle à la droite AB. On voit en effet que, lorsque les cercles sont égaux, la figure ABDC devient un parallélogramme.

114. Remarque II. Les solutions négatives des équations ne sont pas toujours admissibles dans la résolution des problèmes. Souvent la question est de telle nature que les inconnues doivent nécessairement être positives; dans ce cas, si l'on trouve pour les inconnues des valeurs négatives, il y a impossibilité. Cette circonstance se présente dans la question suivante :

Avec deux vins qui coûtent a *et* b *centimes le litre, former* d *litres d'un mélange coûtant* c *centimes le litre.*

Il est évident *à priori* que le prix c de chaque litre du mélange doit être intermédiaire entre les prix a et b de chaque litre des deux vins. Appelons x et y les quantités des deux vins qu'il faut mélanger, nous aurons les équations (nº 16),

$$x + y = d,$$
$$ax + by = cd;$$

d'où l'on déduit

$$x = \frac{d(c-b)}{a-b}, \quad y = \frac{d(a-c)}{a-b}.$$

La nature de la question exige évidemment que les deux inconnues aient des valeurs positives. Nous pouvons toujours supposer a plus grand que b, c'est-à-dire appeler premier vin le plus cher. Dans les deux formules, le dénominateur étant positif, il est nécessaire que chacun des numérateurs soit positif, ce qui aura lieu si les deux conditions

$$c > b, \quad c < a$$

sont remplies. Ainsi, pour que la question admette une solution, il faut que le prix du litre du mélange soit intermédiaire entre les prix des deux vins.

Des cas d'indétermination.

115. Nous avons dit que l'équation du premier degré à une inconnue peut toujours se mettre sous la forme

$$ax = b,$$

et nous avons vu que, lorsque le coefficient a de l'inconnue est nul, sans que le second membre le soit, il y a impossibilité. Supposons maintenant que b soit nul en même temps que a, l'équation devient

$$0 \times x = 0;$$

il s'agit de trouver un nombre qui, multiplié par zéro, donne un produit égal à zéro; tous les membres satisfont évidemment à l'équation, qui se réduit à une identité $0 = 0$, et la valeur de l'inconnue est indéterminée. Dans ce cas, la formule donne pour l'inconnue un symbole de la forme $\frac{0}{0}$.

Exemples :

1° Trouver un nombre qui, augmenté de son sixième et de 10, et diminué de sa moitié, égale deux fois son tiers augmenté de 5. Si l'on appelle x ce nombre, on a l'équation

$$x + \frac{x}{6} + 10 - \frac{x}{2} = 2\left(\frac{x}{3} + 5\right),$$

qui, simplifiée, se réduit à

$$\frac{2x}{3} + 10 = \frac{2x}{3} + 10,$$

ou

$$0 \times x = 0.$$

Tous les nombres satisfont à la question. Il y a indétermination.

2° Trouver deux nombres tels que le tiers du premier égale la moitié du second, moins 1, et que le second égale les deux tiers du premier, plus 2. Si l'on appelle x et y ces deux nombres, on a les deux équations

$$\frac{x}{3}=\frac{y}{2}-1,$$
$$y=\frac{2x}{3}+2.$$

En substituant dans la première la valeur de y donnée par la seconde, on obtient le système équivalent

$$y=\frac{2x}{3}+2,$$
$$0=0.$$

L'une des équations se réduisant à une identité, on n'a qu'une équation à deux inconnues; on peut donner à l'une des inconnues, à x par exemple, une valeur arbitraire, il en résulte pour y une valeur correspondante; ainsi l'équation admet une infinité de solutions, et il y a encore indétermination.

3° Résoudre les deux équations

$$4x-2y=10,$$
$$6x-4y=20.$$

Si l'on multiplie la première équation par 2, on voit qu'elle devient exactement la même que la seconde; ainsi les deux équations n'en font qu'une, et il y a indétermination.

4° Dans le problème des deux mobiles (n° 105), si l'on a à la fois $a=b$, $d=0$, les trois formules deviennent $\frac{0}{0}$, et il y a indétermination; et en effet, les deux mobiles, étant ensemble et marchant avec la même vitesse, ne se quitteront jamais.

5° Dans le problème du mélange (n° 114), si les trois quantités a, b, c sont égales, les deux inconnues se présentent sous la forme $\frac{0}{0}$, et les deux équations du problème n'en font qu'une : il y a indétermination. Et, en effet, les prix des deux vins étant les mêmes, on obtiendra toujours un mélange de ce même prix, quelle que soit la proportion suivant laquelle on mélange les deux vins.

116. Remarque. Le symbole $\frac{0}{0}$ n'indique pas toujours l'indétermination. Il peut arriver qu'une fraction se présente sous cette forme, parce qu'il y a un numérateur et au dénominateur un même facteur algébrique qui devient nul pour certaines valeurs attribuées aux lettres ; on supprimera ce facteur commun, afin d'obtenir la valeur de la fraction.

Exemples. 1° La fraction $\frac{2x-2}{3x-3}$ se présente sous la forme $\frac{0}{0}$, quand on fait $x-1$. Mais cette fraction peut s'écrire $\frac{2(x-1)}{3(x-1)}$, et si l'on supprime le facteur commun $x=1$, on voit qu'elle est constamment égale à $\frac{2}{3}$.

2° La fraction $\frac{2x^2-2x}{3x-3}$ devient aussi $\frac{0}{0}$, quand on y fait $x=1$. Cette fraction peut s'écrire $\frac{2x(x-1)}{3(x-1)}$, ou $\frac{2x}{3}$, si l'on supprime le facteur commun $x-1$; la valeur de cette fraction varie quand on donne à x différentes valeurs ; pour $x=1$, elle est égale à $\frac{2}{3}$.

3° La fraction $\frac{2(x-1)^2}{3(x-1)}$ prend aussi la forme $\frac{0}{0}$ pour $x=1$.

Mais si l'on supprime le facteur commun $x-1$, elle se réduit à $\frac{2(x-1)}{3}$, et devient nulle pour $x-1$.

4° La fraction $\frac{2(x-1)}{3(x-1)^2}$ prend aussi la forme $\frac{0}{0}$ pour $x=1$. Si l'on supprime le facteur commun $x-1$, elle se réduit $\frac{2}{3(x-1)}$, et devient infinie pour $x=1$.

CHAPITRE IV.

FORMULES GÉNÉRALES POUR LA RÉSOLUTION DE DEUX ÉQUATIONS DU PREMIER DEGRÉ A DEUX INCONNUES,

---

117. Deux équations du premier degré à deux inconnues peuvent toujours être mises sous la forme

$$(1) \qquad ax + by = c,$$
$$(2) \qquad a'x + b'y = c',$$

les lettres a, b, c, a', b', c' désignant des quantités connues, positives ou négatives.

Si de la première équation on tire la valeur de y,

$$(3) \qquad y = \frac{c - ax}{b},$$

et qu'on la substitue dans la seconde, on obtient l'équation

$$a'x + \frac{b'(c - ax)}{b} = c',$$

qui se réduit à

$$(4) \qquad (ab' - ba')x = cb' - bc',$$

et où l'on déduit

$$(\alpha) \qquad x = \frac{cb' - bc'}{ab' - ba'}.$$

En portant cette valeur dans l'équation (3), et simplifiant, on trouve

$$(\beta) \qquad y = \frac{ac' - ca'}{ab' - ba'}.$$

Telles sont les formules générales au moyen desquelles

on peut résoudre immédiatement un système quelconque de deux équations du premier degré à deux inconnues. Soient, par exemple, les deux équations

$$5x - 3y = 9,$$
$$7x + 11y = 43;$$

on fera $a = 5$, $b = -3$, $a' = 7$, $b' = 11$, $c = 9$, $c' = 43$, et les formules donneront

$$x = 3, \quad y = 2.$$

118. Remarque. I. Il est facile de se rappeler la composition des formules

$$x = \frac{cb' - bc'}{ab' - ba'}, \quad y = \frac{ac' - ca'}{ab' - ba'},$$

que nous venons de trouver.

Le dénominateur est le même. Les deux lettres a et b, coefficients des inconnues, peuvent être disposées suivant les deux ordres ab ou ba; séparons ces deux expressions par le signe —, et accentuons la seconde lettre dans chacune d'elles, nous formerons le dénominateur

$$ab' - ba'.$$

Si, dans ce dénominateur, nous remplaçons les deux coefficients a et a' de l'inconnue x par les seconds membres c et c' des deux équations, nous formerons le premier numérateur $cb' - bc'$. Si, dans le dénominateur, uous remplaçons de même les coefficients b et b' de l'inconnue y par les seconds membres c et c', nous formerons le second numérateur $ac' - ca'$.

En général, on obtient le numérateur d'une inconnue en remplaçant dans le dénominateur les coefficients de cette inconnue par les seconds membres correspondants.

119. Remarque II. Les deux formules ont entre elles

une analogie qu'il est bon de remarquer et qui permet de déduire l'une de l'autre. A l'inspection des deux équations proposées, nous voyons que la lettre a se rapporte à x, de même que b à y. Si, dans ces équations, on permute les lettres x et y, a et b (c'est-à-dire si l'on remplace x par y et y par x, a par b et b par a), les deux équations deviennent

$$by + ax = c,$$
$$b'y + a'x = c',$$

et ne changent pas. Concevons que l'on répète sur ces dernières les calculs faits précédemment, il suffira évidemment d'effectuer les mêmes permutations dans les résultats. Ainsi, au lieu d'arriver à la valeur de x, on arrivera à celle de y; donc, si dans la formule (α), on effectue la permutation, on aura

$$y = \frac{ca' - ac'}{ba' - ab'},$$

ou, en changeant les signes du numérateur et du dénominateur,

$$y = \frac{ac' - ca'}{ab' - ba'}.$$

Cette valeur de y satisfait au nouveau système d'équations, et par conséquent au système proposé qui est le même.

120. Appliquons encore ces considérations de symétrie aux deux équations

$$x + y = d,$$
$$ax + by = cd,$$

auxquelles on est conduit en résolvant le problème du n° 114. Si, de la seconde, on retranche la première, multipliée par b, on trouve

$$(a - b)x = d(c - b).$$

d'où

$$x = \frac{d(c-b)}{a-b}.$$

On voit que les équations ne changent pas quand on y permute les lettres x et y, a et b ; en effectuant la permutation dans la valeur de x, on aura donc immédiatement

$$y = \frac{d(c-a)}{b-a} = \frac{d(a-c)}{a-b}.$$

Soient encore les deux équations

$$ax + by = c,$$
$$bx + a'y = c.$$

En appliquant les deux formules générales, on trouve

$$x = \frac{c(a'-b)}{aa'-b^2}, \quad y = \frac{c(a-b)}{aa'-b^2}.$$

Il y a encore ici une certaine symétrie. Car, si l'on permute x et y, a et a', les équations deviennent

$$a'y + bx = c,$$
$$by + ax = c;$$

la première est devenue la seconde, la seconde la première, mais le système n'a pas changé. Si donc on effectue dans la valeur de x la même permutation, on trouvera y.

Discussion.

121. On appelle discussion en algèbre l'examen des différents cas que peut présenter une question. En résolvant les deux équations générales du second degré

$$(1) \qquad ax + by = c,$$
$$(2) \qquad a'x + b'y = c';$$

nous avons obtenu les deux formules

$$(\alpha) \qquad x = \frac{cb'-bc'}{ab'-ba'},$$

$$(\beta) \qquad y = \frac{ac'-ca'}{ab'-ba'}.$$

Nous examinerons maintenant les principales circon-

stances qui se rencontrent dans les valeurs des inconnues.

1[er] CAS. En général, le dénominateur commun $ab' - ba'$ n'est pas nul ; dans ce cas, les deux formules donnent pour x et y des valeurs finies et déterminées ; il est aisé de voir que ces deux valeurs vérifient les équations proposées, et que les équations n'admettent aucune autre solution.

En effet, puisque la quantité $ab' - ba'$ est différente de zéro, il est impossible que les quatre coefficients a, b, a', b' des inconnues soient nuls en même temps ; deux au moins sont différents de zéro. Supposons, par exemple, que le coefficient b soit différent de zéro ; on peut tirer de la première équation la valeur de y,

$$(3) \qquad y = \frac{c - ax}{b};$$

car il est permis de diviser par le coefficient b, qui n'est ni nul ni infini. En portant cette valeur dans la seconde et multipliant par b, ce qui est également permis, on obtient l'équation

$$(4) \qquad (ab' - ba')x = cb' - bc'.$$

On remplace ainsi le système des deux équations proposées par le système équivalent des deux équations (3) et (4).

La valeur de x fournie par la formule (α) satisfait évidemment à l'équation (4). L'équation (3) est aussi vérifiée ; car si l'on remplace x par sa valeur, le second membre acquiert une valeur égale à la valeur de y fournit par la formule (β). Il est impossible, d'ailleurs, de vérifier ces équations par d'autres valeurs de x et de y. On conclut de là que le système des équations proposées, qui est équivalent au système des équations (3) et (4), est vérifié par les valeurs (α) et (β), et n'admet aucune autre solution.

Ainsi, *lorsque le dénominateur n'est pas nul, le système des deux équations proposées admet une solution et une seule.*

2e CAS. Voyons ce qui arrive lorsque le dénominateur est nul, et que l'un des numérateurs au moins n'est pas nul. Supposons, par exemple, que le premier numérateur $cb' - bc'$ soit différent du zéro, la valeur de x se présentera sous la forme ∞; dans ce cas il y a impossibilité. En effet, si $cb' - bc'$ n'est pas nul, l'un des deux coefficients b et b' au moins est différent de zéro. Admettons, par exemple, que le coefficient b soit différent de zéro, on pourra résoudre, comme nous l'avons dit, la première équation par rapport à y, et remplacer le système des deux équations proposées par le système équivalent des deux équations (3) et (4). Mais l'équation (4) est évidemment impossible; donc le système proposé est lui-même impossible. Dans ce cas, on dit que les deux équations proposées sont incompatibles, parce qu'on ne peut pas trouver de valeurs de x et de y qui vérifient à la fois les deux équations.

Ainsi, *quand le dénominateur est nul et que l'un des numérateurs ne l'est pas, il y a impossibilité.*

Nous avons supposé $ab' - ba'$ égal à zéro, et $cb' - bc'$ différent de zéro; dans ce cas, la valeur de x se présente sous la forme ∞; l'autre inconnue y se présente généralement sous la même forme. En effet, si de l'égalité

$$ab' - ba' = 0,$$

on tire $a' = \frac{ab'}{b}$, b étant supposé différent de zéro, et que l'on substitue dans $ac' - ca'$, on a

$$ac' - ca' = ac' - \frac{cab'}{b} = -\frac{a}{b}(cb' - bc');$$

le facteur $cb' - bc'$ étant différent de zéro, le premier membre $ac' - ca'$ est aussi différent de zéro, à moins que le coefficient a ne soit nul. Si le coefficient a était nul, l'in-

connue y se présenterait, non pas sous la forme ∞, mais sous la forme $\frac{0}{0}$.

3° CAS. Suppposons maintenant que les deux numérateurs $cb' - bc'$, $ac' - ca'$ soient nuls en même temps que le dénominateur. Il pourrait arriver que les quatre coefficients a, b, a', b' fussent nuls à la fois; dans ce cas, si les deux seconds membres c et c' n'étaient pas nuls, il y aurait impossibilité; si les deux seconds membres étaient aussi nuls, les deux équations se réduiraient à deux identités, et il y aurait indétermination complète, puisque les deux inconnues, n'étant assujetties à aucune relation, pourraient recevoir des valeurs entièrement arbitraires.

Ce cas très-exceptionnel étant écarté, supposons que l'un au moins des coefficients, b par exemple, ne soit pas nul. On peut tirer la valeur de y de la première équation, comme nous l'avons fait, et substituer dans la seconde, ce qui ramène le système des deux équations proposées au système équivalent des deux équations (3) et (4). L'équation (4) devient une identité $0=0$, et les deux équations se réduisent à une seule équation (3). Il y a indétermination; on peut donner à x des valeurs arbitraires; il en résulte pour y des valeurs correspondantes.

Ainsi, *quand les deux numérateurs sont nuls en même temps que le dénominateur, et que l'un des quatre coefficients au moins est différent de zéro, il y a indétermination, et les deux équations n'en font qu'une.*

Remarquons que, dans le cas très-exceptionnel où les quatre coefficients des inconnues sont nuls, sans que les seconds membres le soient, les valeurs données par les formules se présentent toutes les deux sous la forme $\frac{0}{0}$, et cependant il n'y a pas indétermination, il y a au contraire impossibilité.

Exemples.

QUESTION I. ***On connaît les poids spécifiques de deux métaux et l'on demande dans quelle proportion il faut les mélanger pour obtenir un alliage ayant un poids spécifique donné.***

On sait que le poids spécifique d'un corps est le rapport du poids d'un volume quelconque de ce corps au poids d'un égal volume d'eau. En d'autres termes, si l'on prend pour unité de volume le décimètre cube, et pour unité de poids le kilogramme, comme on fait ordinairement dans les arts, on peut dire que le poids spécifique d'un corps est le poids en kilogrammes d'un décimètre cube de ce corps. D'un autre côté, on exprime la composition d'un alliage, en disant quel poids de chaque métal entre dans un kilogramme d'alliage.

Représentons par a et b les poids spécifiques des deux métaux, par c celui de l'alliage; et désignons par x et y les poids de ces deux métaux qui entrent dans un kilogramme d'alliage. On aura d'abord l'équation

$$x+y=1.$$

Cherchons maintenant le poids spécifique de l'alliage, comme si la composition en était connue, et exprimons qu'il est bien égal à c, nous aurons la seconde équation du problème. Le poids d'un corps est égal à son volume multiplié par le poids spécifique, et réciproquement le volume d'un corps est égal à son poids divisé par le poids spécifique. Dans un kilogramme d'alliage il entre des poids x et y des deux métaux, les volumes occupés par ces deux poids sont exprimés par $\frac{x}{a}$ et $\frac{y}{b}$; et le volume d'un kilo-

gramme d'alliage est égal à leur somme $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}$, en supposant toutefois que dans l'alliage des deux métaux il n'y ait ni contraction ni dilatation. Le poids spécifique de l'alliage, étant égal à son poids divisé par son volume, sera

$$\frac{1}{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}}.$$

Mais ce poids spécifique doit être égal à c; on a donc l'équation

$$\frac{1}{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}}=c.$$

Si l'on multiplie par le dénominateur $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}$, cette équation devient

$$c\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)=1,$$

ou

$$\frac{cx}{a}+\frac{cy}{b}=1,$$

$$bcx+acy=ab.$$

Ainsi les deux équations du problème sont

$$x+y=1,$$

$$bcx+acy=ab.$$

On en déduit

$$x=\frac{a(c-b)}{c(a-b)},\qquad y=\frac{b(a-c)}{c(a-b)}.$$

La nature de la question exige que les deux inconnues aient des valeurs positives. Soit $a>b$; il faudra, pour que le problème soit possible, que l'on ait $c>b$ et $c<a$, c'est-à-dire que le poids spécifique de l'alliage soit intermédiaire entre les poids spécifiques des deux métaux, ce qui est évident *à priori*.

Le problème de la couronne de Hiéron (n° 18) est une application des formules précédentes. Le poids spécifique de l'or est 19,26, celui de l'argent 10,47. La couronne perd dans l'eau 467 grammes, c'est le poids d'un égal volume d'eau ; donc le poids spécifique de la couronne égale $\frac{7465}{467} = 15{,}98$. On fera

$$a = 19{,}26, \quad b = 10{,}47, \quad c = 15{,}98.$$

QUESTION II. Résoudre le système des trois équations

$$(1) \qquad x + y + z = 1;$$

$$(2) \qquad ax + by + cz = k,$$

$$(3) \qquad a^2x + b^2y + c^2z = k^2.$$

Si de la seconde on retranche la première multipliée par c, on a

$$(4) \qquad (a-c)x + (b-c)y = k - c.$$

Si de la troisième on retranche la seconde multipliée par c, on a de même

$$(5) \qquad a(a-c)x + b(b-c)y = k(k-c).$$

Retranchons de l'équation (5) l'équation (4) multipliée par b, il vient

$$(a-b)(a-c)x = (k-b)(k-c);$$

$$x = \frac{(k-b)(k-c)}{(a-b)(a-c)}.$$

Une fois qu'on a trouvé la valeur de l'une des inconnues, il est facile d'en déduire les autres par des considérations de symétrie. On remarque, en effet, que les équations proposées ne changent pas lorsqu'on permute les deux lettres

x et y, a et b. Si donc on effectue cette permutation dans la formule précédente, on obtiendra la valeur de y,

$$y = \frac{(k-a)(k-c)}{(b-a)(b-c)}.$$

De même, les équations ne changent pas lorsqu'on permute les deux lettres y et z, b et c. Si donc, dans la valeur de y, on effectue cette permutation, on aura la valeur de z

$$z = \frac{(k-a)(k-b)}{(c-a)(c-b)}.$$

Question III. Résoudre le système des quatre équations

$$\begin{gathered} x + y + z + u = 1, \\ ax + by + cy + du = k, \\ a^2x + b^2y + c^2z + d^2u = k^2, \\ a^3x + b^3y + c^3z + d^3u = k^3. \end{gathered}$$

Si de chacune de ces équations, on retranche la précédente multipliée par d, on obtient les trois équations

$$\begin{gathered} (a-d)x + (b-d)y + (c-d)z = k-d, \\ a(a-d)x + b(b-d)y + c(c-d)z = k(k-d), \\ a^2(a-d)x + b^2(b-d)y + c^2(c-d)z = k^2(k-d). \end{gathered}$$

Opérant de la même manière sur ces trois équations, retranchons de chacune d'elles la précédente multipliée par c, nous obtiendrons les deux équations

$$\begin{gathered} (a-c)(a-d)x + (b-c)(b-d)y = (k-c)(k-d), \\ a(a-c)(a-d)x + b(b-c)(b-d)y = k(k-c)(k-d). \end{gathered}$$

Si enfin de la dernière nous retranchons la précédente multipliée par b, nous aurons

$$(a-b)(a-c)(a-d)x = (k-b)(k-c)(k-d),$$

d'où

$$x = \frac{(k-b)(k-c)(k-d)}{(a-b)(a-c)(a-d)}.$$

En permutant les lettres a et b, puis les lettres b et c, puis c et d, on en déduit la valeur des autres inconnues

$$y = \frac{(k-a)(k-c)(k-d)}{(b-a)(b-c)(b-d)},$$

$$z = \frac{(k-a)(k-b)(k-d)}{(c-a)(c-b)(c-d)},$$

$$u = \frac{(k-a)(k-b)(k-c)}{(d-a)(d-b)(d-c)}.$$

Question IV. Résoudre le système des trois équations

$$\frac{b}{z} + \frac{c}{y} = a,$$

$$\frac{c}{x} + \frac{a}{z} = b,$$

$$\frac{a}{y} + \frac{b}{x} = c.$$

On considérera dans ces trois équations les quantités $\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}$ comme étant les inconnues. En multipliant la première équation par a, la seconde par b, la troisième par c, ajoutant les deux dernières en retranchant la première, on trouve

$$\frac{2bc}{x} = b^2 + c^2 - a^2;$$

d'où

$$\frac{1}{x} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.$$

Si l'on permute les lettres x et y, a et b, on remarque que la première équation devient la seconde, la seconde la

première, et que la troisième reste la même; donc le système des trois équations ne change pas. Il en résulte que si, dans la valeur de x, on effectue cette permutation, on aura la valeur de y

$$\frac{1}{y}=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}.$$

De même, si l'on permute les lettres y et z, b et c, la deuxième équation devient la troisième, la troisième la seconde, et la première reste la même; le système ne change pas. De la valeur de y, on déduira donc celle de z par la permutation indiquée, ce qui donne

$$\frac{1}{z}=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}.$$

CHAPITRE V*.

FORMULES GÉNÉRALES POUR LA RÉSOLUTION DE TROIS ÉQUATIONS DU PREMIER DEGRÉ A TROIS INCONNUES.

---

122. Trois équations du premier degré à trois inconnues peuvent toujours être mises sous la forme

$$(1) \qquad ax + by + cz = d,$$
$$(2) \qquad a'x + b'y + c'z = d',$$
$$(3) \qquad a''x + b''y + c''z = d''.$$

Nous résoudrons ces trois équations par une méthode plus rapide et plus élégante que la méthode de substitution. Multiplions les deux premières équations par deux quantités indéterminées m et n; ajoutons ces deux équations et retranchons la troisième, nous aurons

$$(4) \qquad \begin{aligned}(am + a'n - a'')x + (bm + b'n - b'')y \\ + (cm + c'n - c'')z = dm + d'n - d''.\end{aligned}$$

Les deux multiplicateurs m et n étant arbitraires, on peut en disposer de manière à annuler deux coefficients de l'équation (4), par exemple les coefficients de y et de z. Posons donc

$$(5) \qquad bm + b'n = b'',$$
$$(6) \qquad cm + c'n = c'',$$

l'équation (4) devient

$$(am + a'n - a'')x = dm + d'n - d'';$$

d'où

$$x = \frac{dm + d'n - d''}{am + a'n - a''}, \tag{7}$$

Des deux équations (5) et (6), résolues au moyen des formules générales, on déduit

$$m = \frac{c'b'' - b'c''}{bc' - cb'}, \quad n = \frac{bc'' - cb''}{bc' - cb'};$$

en substituant ces valeurs dans la formule (7), et multipliant le numérateur et le dénominateur par $bc' - cb'$, on a

$$x = \frac{d(c'b'' - b'c'') + d'(bc'' - cb'') - d''(bc' - cb')}{a(c'b'' - b'c'') + a'(bc'' - cb'') - a''(bc' - cb')}.$$

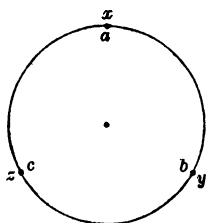
Changeons les signes du numérateur et du dénominateur, la valeur de x s'écrit

$$x = \frac{d(b'c'' - c'b'') + d'(cb'' - bc'') + d''(bc' - cb')}{a(b'c'' - c'b'') + a'(cb'' - bc'') + a''(bc' - cb')},$$

et, en développant les calculs,

$$x = \frac{db'c'' - dc'b'' + cd'b'' - bd'c'' + bc'd'' - cb'd''}{ab'c'' - ac'b'' + ca'b'' - ba'c'' + bc'a'' - cb'a''}. \tag{α}$$

123. **Remarque I.** On pourrait calculer de la même manière les valeurs de y et de z. Mais il est plus simple de les déduire de celle de x par des considérations de symétrie. Sur un cercle, et aux sommets d'un triangle équilatéral inscrit, plaçons les trois lettres x, y, z, ainsi que les trois lettres a, b, c; imaginons ensuite que le cercle tourne autour de son centre dans un sens convenable d'un tiers de circonférence, la lettre y prendra la place de x, z celle de y, x celle de z; de même les lettres b, c, a



prendront la place des lettres a, b, c. Ce changement dans l'ordre des lettres s'appelle une *permutation circulaire.*

Si l'on opère une semblable permutation sur les équations proposées, elles deviennent

$$\begin{aligned} by+cz+ax&=d,\\ b'y+c'z+a'x&=d',\\ b''y+c''z+a''x&=d'', \end{aligned}$$

et ne changent pas ; les valeurs des inconnues restent donc les mêmes. Or, si l'on effectue la permutation circulaire sur la valeur de x trouvée précédemment, on obtient

$$(\beta) \qquad y=\frac{dc'a''-da'c''+ad'c''-cd'a''+ca'd''-ac'd''}{bc'a''-ba'c''+ab'c''-cb'a''+ca'b''-ac'b''}.$$

Cette valeur de y satisfait au second système d'équations et par conséquent au système proposé.

Si l'on effectue sur le second système d'équations une nouvelle permutation circulaire, le système ne change pas, et la valeur de y devient

$$(\gamma) \qquad z=\frac{da'b''-db'a''+bd'a''-ad'b''+ab'd''-ba'd''}{ca'b''-cb'a''+bc'a''-ac'b''+ab'c''-ba'c''}.$$

En permutant une troisième fois, on retrouverait la valeur de x et ainsi de suite.

124. Remarque II. A l'inspection des formules (α), (β), (γ), on reconnaît que le dénominateur est le même ; l'ordre des termes seulement a été changé. On voit aussi que l'on forme le numérateur de x, en remplaçant dans le dénominateur les coefficients a, a', a'' de l'inconnue x par les seconds membres d, d', d''. Les numérateurs de y et z s'obtiennent de la même manière. Il suffit donc de savoir trouver le dénominateur.

Nous avons formé le dénominateur pour deux inconnues, en écrivant les deux permutations

$$ab, \qquad -ba$$

des deux lettes a et b, et affectant la seconde du signe —. Dans chacune de ces permutations, mettons la troisième lettre c à toutes les places, à la fin, au milieu, et au commencement, et alternons les signes, nous obtiendrons les deux groupes

$$abc - acb + cab$$
$$- bac + bca - cba.$$

Le premier terme de chaque groupe a le signe du terme qui l'a fourni.

Écrivons ces deux groupes l'un à la suite de l'autre, et dans chaque terme affectons la seconde lettre d'un accent, la troisième de deux accents, nous aurons aussi le dénominateur commun

$$ab'c'' - ac'b'' + ca'b'' - ba'c'' + bc'a'' - cb'a''.$$

Discussion.

125. En résolvant par un procédé particulier les trois équations

$$(1) \qquad ax + by + cz = d,$$
$$(2) \qquad a'x + b'y + c'z = d'$$
$$(3) \qquad a''x + b''y + c''z = d'',$$

nous avons obtenu les formules (α), (β), (γ). Ces formules présentent les mêmes cas principaux que celles relatives à deux équations à deux inconnues. Pour abréger l'écriture, nous représenterons par D le dénominateur commun; et par A, B, C les trois numérateurs, de manière à écrire les formules sous la forme

$$x = \frac{A}{D}, \quad y = \frac{B}{D}, \quad z = \frac{C}{D}.$$

1er Cas. En général le dénominateur commun D n'est pas nul. Dans ce cas, les formules donnent pour les inconnues des valeurs finies et déterminées; il est aisé de voir que ces valeurs vérifient les équations proposées et que ces équations n'admettent pas d'autre solution.

Puisque le dénominateur D est différent de zéro, il est impossible que les neuf coefficients des inconnues dans les équations soient nuls à la fois; trois au moins seront différents de zéro; supposons, par exemple, que le coefficient c soit différent de zéro. On pourra de la première équation tirer la valeur

$$(4) \qquad z = \frac{d - ax - by}{c},$$

et la porter dans les deux autres, ce qui donne les deux équations

$$(5) \qquad (ac' - ca')x + (bc' - cb')y = dc' - cd',$$

$$(6) \qquad \frac{(ac'' - ca'')x + (bc'' - cb'')y}{c} = \frac{dc'' - cd''}{c},$$

et l'on remplace ainsi le système des trois équations proposées par le système équivalent des trois équations (4), (5), (6). Si l'on applique aux deux équations (5) et (6) les formules relatives à deux équations à deux inconnues, on obtient les valeurs

$$x = \frac{A}{D}, \quad y = \frac{B}{D},$$

données par les formules (α) et (β). Le dénominateur D étant différent de zéro, on sait que ces valeurs vérifient les deux équations (5) et (6). Si dans l'équation (4) on remplace x et y par leurs valeurs, on obtient la valeur de z donnée par la formule (γ). Ainsi, les valeurs fournies par les formules (α), (β), (γ) vérifient le système des trois équa-

tions (4), (5), (6), et par suite le système proposé équivalent, et ce système n'admet pas d'autre solution.

2ᵉ Cas. Supposons que le dénominateur D soit nul, l'un des numérateurs au moins, par exemple le numérateur A, étant différent de zéro. Chacun des termes de A renfermant les lettres b et c, il est impossible que les six coefficients b, b', b'', c, c', c'' soient nuls à la fois; deux au moins sont différents de zéro; admettons par exemple que le coefficient c soit différent de zéro. On pourra tirer de l'équation (1) la valeur de z, comme nous l'avons fait, et remplacer le système des équations proposées par le système équivalent des équations (4), (5), (6). Si l'on considère les deux équations (5) et (6) à deux inconnues x et y, puisque le dénominateur D est nul, l'un des numérateurs A étant différent de zéro, il y a impossibilité; donc aussi les équations proposées sont incompatibles.

3ᵉ Cas. Supposons que les trois numérateurs A, B, C soient nuls, en même temps que le dénominateur D. Il pourrait arriver que les neuf coefficients des inconnues fussent nuls à la fois; dans ce cas, il y aurait impossibilité, à moins que les trois seconds membres d, d', d'' ne fussent aussi nuls, et alors, les trois équations se réduisant à des identités, il y aurait indétermination absolue, et l'on pourrait donner aux trois inconnues des valeurs tout à fait arbitraires.

Ce cas très-exceptionnel étant écarté, supposons que l'un au moins des neuf coefficients soit différent de zéro, par exemple le coefficient c; on pourra de l'équation (1) tirer la valeur de z et remplacer le système des équations proposées par le système équivalent des équations (4), (5), (6). Il pourrait arriver que les quatre coefficients des inconnues x et y dans les deux équations (5) et (6) fussent nuls à la fois, ce qui annulerait D, ainsi que A et B; il est aisé de voir que le troisième numérateur C serait aussi nul; on a, en effet,

$$C = (a'b'' - b'a'')d + (ba'' - ab'')d' + (ab' - ba')d'';$$

si l'on avait

$$ac' - ca' = 0, \quad bc' - cb' = 0,$$
$$ac'' - ca'' = 0, \quad bc'' - cb'' = 0,$$

on en déduirait, en divisant par c,

$$a' = \frac{ac'}{c}, \quad b' = \frac{bc'}{c},$$
$$a'' = \frac{ac''}{c}, \quad b'' = \frac{bc''}{c};$$

d'où

$$a'b'' - b'a'' = 0, \quad ba'' - ab'' = 0, \quad ab' - ba' = 0,$$

et par suite $C = 0$. Dans ce cas, les deux équations (5) et (6) seraient impossibles, à moins que les deux seconds membres $dc' - cd'$, $dc'' - cd''$ ne fussent aussi nuls, et alors ces deux équations deviendraient des identités et les trois équations proposées se réduiraient à une seule, l'équation (4); on pourrait prendre arbitrairement les valeurs des deux inconnues x et y, la valeur de z en résulterait.

Ce cas exceptionnel étant écarté encore, supposons que, l'un au moins des quatre coefficients des inconnues dans les équations (5) et (6) soit différent de zéro. Le dénominateur D étant nul, ainsi que les deux numérateurs A et B, on sait que les deux équations (5) et (6) se réduisent à une seule. Les trois équations proposées se réduisent donc à deux, savoir les équations (4) et (5); il y a indétermination; on peut prendre arbitrairement la valeur de x; celles de y et de z en résultent.

Exercices sur le Livre II.

Question I. Résoudre le système des trois équations

$$2x + 4y - 3z = 22,$$
$$4x - 2y + 5z = 18,$$
$$6x + 7y - z = 63.$$

Réponse : $x = 3, \quad y = 7, \quad z = 4.$

Question II. Résoudre les trois équations.

$$x+\frac{y}{2}=1,$$

$$y+\frac{z}{3}=1,$$

$$z+\frac{x}{4}=1.$$

Réponse : $x=\frac{16}{25},\quad y=\frac{18}{25},\quad z=\frac{21}{25}.$

Question III. Résoudre les trois équations

$$\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}=41,$$

$$\frac{x}{3}+\frac{y}{4}+\frac{z}{5}=31,$$

$$\frac{x}{4}+\frac{y}{5}+\frac{z}{6}=25.$$

Réponse : $x=12,\quad y=60,\quad z=60.$

Question IV. Résoudre les quatre équations

$$4x-3y+2u=7,$$
$$2x+6z=28,$$
$$4u-2y=14,$$
$$3x+4u=26.$$

Réponse : $x=2,\quad y=3,\quad z=4,\quad u=5.$

Question V. Résoudre les quatre équations

$$x-y+z-u=-2,$$
$$y-2z+3u-4x=4,$$
$$z-3u+6x-15y=-33.$$
$$u-4x+10y-20z=-40.$$

Réponse : $x=1,\ y=2,\ z=3,\ u=4.$

Question VI. Résoudre les trois équations

$$x+a(y+z)=\alpha,$$
$$y+b(z+x)=\beta,$$
$$z+c(x+y)=\gamma.$$

Réponse : $x=\frac{(1-bc)\alpha+a(c-1)\beta+a(b-1)\gamma}{1-bc-ca-ab+2abc}.$

. . . .

. . . .

Question VII. Résoudre les trois équations

$$x + ay + a^2z + a^3 = 0,$$
$$x + by + b^2z + b^3 = 0,$$
$$x + cy + c^2z + c^3 = 0.$$

Réponse :

$$z = -(a + b + c),$$
$$y = bc + ca + ab,$$
$$x = -abc.$$

Question VIII. Résoudre les quatre équations

$$x + ay + a^2z + a^3u + a^4 = 0,$$
$$x + by + b^2z + b^3u + b^4 = 0,$$
$$x + cy + c^2z + c^3u + c^4 = 0,$$
$$x + dy + d^2z + d^3u + d^4 - 0.$$

Réponse :

$$u = -(a + b + c + d),$$
$$z = ab + ac + ad + bc + bd + cd,$$
$$y = -(abc + bcd + cda + dab),$$
$$x = abcd.$$

Question IX. Résoudre les équations

$$x + ay + bz = \alpha,$$
$$y + az + bx = \beta,$$
$$z + ax + by = \gamma.$$

Question X. Résoudre les équations

$$x + ay = \alpha,$$
$$y + bz = \beta,$$
$$z + ct = \gamma,$$
$$t + du = \delta,$$
$$u + ex = \varepsilon.$$

Question XI. Résoudre les équations n à n inconnues

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \ldots + nx_n = \alpha_1,$$
$$x_2 + 2x_3 + 4x_4 + \ldots + nx_1 = \alpha_2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x_n + 2x_1 + 3x_2 + \ldots + nx_{n-1} = \alpha_n.$$

Question XII. En alliant deux lingots d'argent dans des rapports donnés, on a formé deux nouveaux lingots dont les titres sont connus. Quels sont les titres des deux premiers lingots?

En appelant a et $1 - a$ les poids des deux lingots qui entrent dans un kilogramme du premier alliage, a' et $1 - a'$ les poids des deux lingots qui

entrent dans un kilogramme du second alliage, b et b' les titres des deux alliages, x et y les titres des deux lingots, on a les équations

$$ax + (1 - a)y = b,$$
$$a'x + (1 - a')y = b';$$

d'où l'on déduit

$$x = \frac{(1 - a')\,b - (1 - a)b'}{a - a'},$$
$$x = \frac{ab' - ba'}{a - a'}.$$

Question XIII. Connaissant la composition et les prix de trois mélanges formés de trois substances différentes, trouver les prix de ces trois substances.

Question XIV. Trois joueurs conviennent que le perdant doublera l'argent des deux autres. Ils perdent chacun une partie, et à la fin ils ont chacun la même somme a. Combien chacun avait-il au commencement?

Réponse : $\frac{13a}{8}$, $\frac{7a}{8}$, $\frac{4a}{8}$.

Question XV. Même question étendue à un nombre quelconque n de joueurs.

Réponse :

$$\frac{(1 + n2^{n-1})a}{2^n}, \quad \frac{(1 + n2^{n-2})a}{2^n}, \quad \frac{(1 + n2^{n-3})a}{2^n}, \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \frac{(1 + n)a}{2^n}.$$

Question XVI. On partage une certaine somme entre plusieurs personnes de la manière suivante : la première prend une somme a et la n^e partie de ce qui reste; la deuxième une somme $2a$ et la n^e partie de ce qui reste; la troisième une somme $3a$ et la n^e partie de ce qui reste, et ainsi de suite. Il se trouve à la fin que la somme d'argent a été partagée exactement et que toutes les parts sont égales. On demande quel est le nombre des personnes et la part de chacune.

Réponse : Le nombre des personnes est $n - 1$; la part de chacun $a\,(n - 1)$, et la somme totale $a\,(n - 1)^2$.

Question XVII. Un tonneau contient a litres de vin. On tire un litre que l'on remplace par un litre d'eau; on tire un second litre que l'on remplace par un litre d'eau, et ainsi de suite. Quelle quantité de vin contiendra encore le tonneau après n opérations de ce genre?

Réponse : $\frac{(a-1)^n}{a^{n-1}}$.

Question XVIII. Deux vases de capacités données contiennent chacun un mélange connu d'eau et de vin. Quelle capacité doivent avoir deux vases

égaux, pour que, les remplissant à la fois, l'un dans l'un des vases donnés, l'autre dans l'autre, et versant dans chacun d'eux ce qui a été pris dans l'autre, la proportion du mélange devienne la même dans les deux vases ?

QUESTION XIX. Inscrire dans un triangle donné un rectangle semblable à un rectangle donné.

QUESTION XX. Dans un triangle donné inscrire un rectangle de périmètre donné.

QUESTION XXI. Un groupe de n joueurs jouent de la manière suivante : le premier joue avec le deuxième et perd une fraction a de ce qu'il a ; le second joue ensuite avec le troisième, et perd la même fraction a de ce qu'il a en ce moment, et ainsi de suite ; enfin, le dernier joue avec le premier et perd la fraction a de ce qu'il a. A la fin du jeu, les joueurs ont la même somme b. Quelle somme chacun avait-il au commencement?

QUESTION XXII. Résoudre les équations

$$\frac{a}{a-\alpha}+\frac{y}{b-\alpha}+\frac{z}{c-\alpha}=1,$$
$$\frac{x}{a-\beta}+\frac{y}{b-\beta}+\frac{z}{c-\beta}=1,$$
$$\frac{x}{a-\gamma}+\frac{y}{b-\gamma}+\frac{z}{c-\gamma}=1.$$

QUESTION. XXIII Couper une sphère donnée par un plan, de manière que la surface de la calotte sphérique soit égale à la surface latérale du cône qui a pour sommet le centre de la sphère et pour base le cercle déterminé par le plan sécant.

LIVRE III.

ÉQUATIONS DU SECOND DEGRÉ.

CHAPITRE PREMIER.

CARRÉ ET RACINE CARRÉE.

Je rappelle d'abord quelques principes qui ont déjà été vus en arithmétique et qui nous seront utiles par la suite.

126. Théorème I. *Le carré d'un binôme égale le carré du premier terme, plus deux fois le produit du premier par le second, plus le carré du second.*

Si l'on multiplie le binôme $a + b$ par lui-même, on trouve en effet

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Ainsi le carré du binôme $x - 3$ est

$$x^2 - 6x + 9.$$

Le carré du binôme $x + \frac{p}{2}$ est

$$x^2 + px + \frac{p^2}{4}.$$

127. Théorème II. *On élève au carré le produit de plusieurs facteurs en élevant chaque facteur séparément au carré.*

Si l'on multiplie le produit abc par lui-même, d'après la règle de la multiplication des monômes, on trouve en effet

$$(abc)^2 = a^2b^2c^2.$$

COROLLAIRE. *On élève au carré un monôme entier, en élevant le coefficient au carré et doublant tous les exposants.* Soit, par exemple, le monôme $7a^3b^2c$; en le multipliant par lui-même, on a

$$(7a^3b^2c)^2 = 49a^6b^4c^2.$$

128. THÉORÈME III. Réciproquement, *on extrait la racine carrée d'un produit de plusieurs facteurs en extrayant la racine carrée de chaque facteur séparément.*

Soit le produit abc. Je dis que

$$\sqrt{abc} = \sqrt{a}\sqrt{b}\sqrt{c}.$$

En effet, si l'on élève le second membre au carré, ce que l'on fait en élevant chaque facteur séparément au carré, on reproduit la quantité abc.

129. COROLLAIRE I. *On extrait la racine carrée d'un monôme entier en extrayant la racine carrée du coefficient et divisant par deux tous les exposants.* Je dis, par exemple, que

$$\sqrt{49a^6b^4c^2} = 7a^3b^2c.$$

Car, si l'on élève le second membre au carré, on reproduit $49a^6b^4c^2$.

Pour qu'un monôme entier soit carré parfait, c'est-à-dire pour qu'il existe un monôme entier, qui, élevé au carré, reproduise le nombre proposé, il est nécessaire que son coefficient soit un nombre carré parfait et que tous ses exposants soient pairs.

130. COROLLAIRE II. *On fait sortir du signe radical un facteur carré parfait, en en prenant la racine carrée.* Soit l'expression

$$\sqrt{a^2b}.$$

En extrayant la racine de chaque facteur séparément, on écrira

$$\sqrt{a^2b} = a\sqrt{b}.$$

Ceci permet de simplifier les expressions irrationnelles. Soit l'expression irrationnelle

$$\sqrt{12a^7b^4c^3}.$$

On remarque que la quantité placée sous le signe radical peut être décomposée en deux facteurs

$$12a^7b^4c^3 = 4a^6b^4c^2 \times 3ac,$$

dont le premier est carré parfait. Si l'on extrait la racine de chacun des deux facteurs séparément, on a

$$\sqrt{12a^7b^4c^3} = 2a^3b^2c\sqrt{3ac}.$$

Réciproquement, *on introduit un facteur sous le signe radical en l'élevant au carré.* Ainsi

$$a\sqrt{b} = \sqrt{a^2b}.$$

131. Théorème IV. *On élève une fraction au carré, en élevant séparément au carré le numérateur et le dénominateur.*

Car, si l'on multiplie la fraction $\frac{a}{b}$ par elle-même, on a

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2}.$$

132. Théorème V. Réciproquement, *on extrait la racine carrée d'une fraction en extrayant séparément la racine du numérateur et du dénominateur.* Ainsi

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}.$$

Car, si l'on élève le second membre au carré, on reproduit la fraction $\frac{a}{b}$.

Transformation des expressions irrationnelles.

133. On simplifie le calcul des expressions irrationnelles en transformant ces expressions de manière à rendre le dénominateur rationnel. Voici quelques exemples de semblables transformations fréquemment usitées en algèbre.

1°
$$\frac{3}{2\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{10}.$$

On a multiplié par $\sqrt{5}$ les deux termes de la fraction.

2° Soit l'expression

$$\frac{m}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}.$$

Si l'on multiplie le numérateur et le dénominateur par $\sqrt{a} - \sqrt{b}$, le dénominateur, étant le produit de la somme de deux quantités par leur différence, égale la différence $a - b$ de leurs carrés, et devient rationnel. On a donc

$$\frac{m}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{m(\sqrt{a} - \sqrt{b})}{a - b}.$$

On a de même

$$\frac{m}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} = \frac{m(\sqrt{a} + \sqrt{b})}{a - b},$$

en multipliant le numérateur et le dénominateur par la somme $\sqrt{a} + \sqrt{b}$.

Exemples :

$$\frac{2\sqrt{7}}{2\sqrt{5} - 3\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{7}(2\sqrt{5} + 3\sqrt{2})}{2} = 2\sqrt{35} + 3\sqrt{14}.$$

On a multiplié le numérateur et le dénominateur par la somme $2\sqrt{5} + 3\sqrt{2}$, ce qui rend le dénominateur égal à

la différence des carrés, $4 \times 5 - 9 \times 2 = 20 - 18 = 2$. On a supprimé le facteur 2 commun au numérateur et au dénominateur, puis on a multiplié $2\sqrt{5} + 3\sqrt{2}$ par $\sqrt{7}$, ce qui donne $2\sqrt{35} + 3\sqrt{14}$; car $\sqrt{5} \times \sqrt{7} = \sqrt{5 \times 7} = \sqrt{35}$, et de même $\sqrt{2} \times \sqrt{7} = \sqrt{2 \times 7} = \sqrt{14}$.

3° Soit l'expression

$$\frac{m}{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}}.$$

Si l'on multiplie le numérateur et le dénominateur par la différence $(\sqrt{a} + \sqrt{b}) - \sqrt{c}$, en considérant $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ comme ne formant qu'un seul terme, on a

$$\frac{m}{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}} = \frac{m(\sqrt{a} + \sqrt{b} - \sqrt{c})}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 - c} = \frac{m(\sqrt{a} + \sqrt{b} - \sqrt{b})}{a + b - c + 2\sqrt{ab}}.$$

Cette dernière expression ne renferme plus qu'un seul terme irrationnel à son dénominateur. On considérera $a + b - c$ comme ne formant qu'un terme et l'on multipliera par la différence $(a + b - c) - 2\sqrt{ab}$; l'expression devient ainsi

$$\frac{m(\sqrt{a} + \sqrt{b} - \sqrt{c})(a + b - c - 2\sqrt{ab})}{(a + b - x)^2 - 4ab};$$

le dénominateur est rationnel.

CHAPITRE II.

RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS DU SECOND DEGRÉ.

Résolution de l'équation $x^2 = A$.

134. Toute équation du second degré à une inconnue peut être mise sous la forme

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

dans laquelle x désigne l'inconnue, et les lettres a, b, c des quantités connues. Elle contient trois termes, un du second degré ax^2, un du premier degré bx, et un terme connu c.

Considérons d'abord le cas où l'équation ne renferme pas de terme du premier degré. Soit, par exemple, l'équation

$$x^2 = 25.$$

Il faut trouver une quantité qui, élevée au carré, donne 25. Or le nombre 5, élevé au carré, donne 25; que l'on affecte ce nombre 5 du signe $+$ ou du signe $-$, son carré sera toujours égal à 25; car on sait que le carré d'une quantité négative est positif. Ainsi l'équation admet les deux solutions $+5$ et -5, ce qu'on écrit

$$x = \pm 5,$$

(*lisez* x égale plus ou moins 5). L'équation n'admet aucune autre solution; car le nombre 5 est le seul nombre dont le carré égale 25.

En général soit l'équation

$$x^2 = A.$$

dans laquelle A représente une quantité positive donnée. Désignons par $\sqrt{A}$ le nombre, commensurable ou incommensurable, dont le carré est A; ce nombre, affecté du signe + ou du signe —, aura toujours son carré égal à A; ainsi l'équation proposée admet deux solutions égales et de signes contraires $+\sqrt{A}$ et $-\sqrt{A}$, ce qu'on écrit

$$x = \pm\sqrt{A}.$$

Ces solutions s'appellent aussi les *racines* de l'équation, parce qu'on les obtient au moyen de l'extraction d'une racine carrée. Mais cette dénomination a été étendue aux solutions des équations de tous les degrés.

Résolution de l'équation $x^2 + px + q = 0$.

135. Considérons maintenant l'équation générale du second degré

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Si nous divisons tous les termes par le coefficient a, cette équation devient

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0,$$

ou

$$x^2 + px + q = 0,$$

en représentant pour abréger par les lettres p et q les quantités connues $\frac{b}{a}$ et $\frac{c}{a}$.

Afin de mieux faire comprendre la méthode, nous l'expliquerons d'abord sur un exemple. Soit l'équation

$$x^2 - 14x + 40 = 0.$$

Si l'on fait passer dans le second membre le terme connu, cette équation devient

$$x^2 - 14x = -40.$$

Les deux termes $x^2 - 14x$ peuvent être considérés comme les deux premiers termes du carré du binôme $x-7$; et en effet, le carré de ce binôme est $x^2-14x+49$; pour compléter le carré, ajoutons 49 aux deux membres de l'équation, nous aurons

$$x^2-14x+49=49-40=9,$$

ou

$$(x-7)^2=9,$$

en remplaçant le premier membre par l'expresssion équivalente $(x-7)^2$. Cette dernière équation est évidemment équivalente à l'équation proposée.

La quantité $x-7$ doit être telle que son carré égale 9 ; or le nombre 3, affecté du signe + ou du signe —, a son carré égal à 9, et c'est le seul nombre dont le carré égale 9 ; on doit donc avoir

$$x-7=\pm 3,$$

d'où

$$x=7\pm 3.$$

Ainsi l'équation proposée admet les deux solutions

$$x=7+3=10,$$
$$x=7-3=4.$$

On peut vérifier en effet que chacun des nombres 10 et 4, mis à la place de x, satisfait à l'équation

$$x^2-14x+40=0,$$

c'est-à-dire annule le premier membre.

136. La méthode précédente s'applique sans difficulté à l'équation générale

$$x^2+px+q=0.$$

Si l'on fait passer le terme connu dans le second membre, cette équation devient

$$x^2+px=-q.$$

Les deux termes x^2+px sont les deux premiers termes du

carré du binôme $x+\frac{p}{2}$; et en effet, si l'on forme le carré de ce binôme d'après la loi connue, on a

$$\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 = x^2 + px + \frac{p^2}{4}.$$

Pour compléter le carré, ajoutons $\frac{p^2}{4}$ aux deux membres de l'équation, l'équation devient

$$x^2 + px + \frac{p^2}{4} = \frac{p^2}{4} - q,$$

et peut être mise sous la forme

$$\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 = \frac{p^2}{4} - q.$$

Nous supposons que la quantité connue $\frac{p^2}{4} - q$ est positive. L'équation étant mise sous cette dernière forme, on voit que la quantité inconnue $x+\frac{p}{2}$ doit être telle que son carré égale la quantité connue $\frac{p^2}{4} - q$; or, si nous désignons par $\sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$ la racine carrée arithmétique du nombre positif $\frac{p^2}{4} - q$, c'est-à-dire le nombre positif, commensurable ou incommensurable, dont le carré égale $\frac{p^2}{4} - q$, la quantité inconnue $x+\frac{p}{2}$ doit être égale au nombre $\sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$, affecté du signe $+$ ou du signe $-$. On aura donc

$$x+\frac{p}{2} = \pm\sqrt{\frac{p^2}{4} - q},$$

d'où l'on déduit

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

Telle est la formule générale dont on se sert pour résoudre les équations du second degré ; elle donne deux solutions, l'une fournie par le signe $+$ placé devant le radical, l'autre par le signe $-$. Il est bon de se la rappeler par cœur ; on l'énonce ainsi : ***les deux racines d'une équation du second degré, mise sous la forme***

$$x^2 + px + q = 0,$$

égalent la moitié du coefficient du terme du premier degré changé de signe, plus ou moins la racine carrée du résultat obtenu en retranchant du carré de cette moitié le terme connu.

137. Appliquons cette formule à quelques exemples :

1° Résoudre l'équation

$$x^2 + 6x + 8 = 0.$$

La formule donne

$$x = -3 \pm \sqrt{9 - 8} = -3 \pm \sqrt{1} = -3 \pm 1.$$

L'équation admet les deux solutions

$$x = -2, \quad x = -4.$$

2° Résoudre l'équation

$$x^2 - 7x + 10 = 0.$$

La formule donne

$$x = \frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{49}{4} - 10} = \frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{7}{2} \pm \frac{3}{2}.$$

L'équation admet les deux solutions

$$x = 5, \quad x = 2.$$

3° Résoudre l'équation

$$x^2 + 4x - 12 = 0.$$

La formule donne

$$x = -2 \pm \sqrt{4 + 12} = -2 \pm \sqrt{16} = -2 \pm 4.$$

L'équation admet les deux solutions

$$x = +2, \quad x = -6,$$

4° Résoudre l'équation

$$x^2 - 3x - 4 = 0.$$

La formule donne

$$x = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + 4} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{3}{2} \pm \frac{5}{2}.$$

L'équation admet les deux solutions

$$x = +4, \quad x = -1.$$

Racines égales.

138. Dans ce qui précède, après avoir mis l'équation du second degré sous la forme

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \frac{p^2}{4} - q,$$

nous avons supposé que le second membre est une quantité positive, et nous en avons déduit la formule

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q},$$

qui nous donne les *deux* racines, ou les deux solutions de l'équation.

Lorsque la quantité $\frac{p^2}{4} - q$ est nulle, l'équation devient

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = 0.$$

Le premier membre est un carré parfait. La quantité inconnue $x + \frac{p}{2}$, devant avoir son carré nul, doit être nulle elle-même ; ainsi l'on a

$$x + \frac{p}{2} = 0,$$

d'où

$$x = -\frac{p}{2}.$$

L'équation n'admet plus qu'une seule solution $x = -\frac{p}{2}$.

Cependant on a coutume de dire que, dans ce cas, l'équation admet *deux racines égales*. En voici la raison : supposons que la quantité $\frac{p^2}{4} - q$ soit positive et très-petite ; les deux racines, données par la formule générale, différeront très-peu de $-\frac{p}{2}$, l'une en plus, l'autre en moins, et par conséquent différeront très-peu l'une de l'autre. Plus la quantité $\frac{p^2}{4} - q$ sera petite, plus les deux racines se rapprocheront l'une de l'autre ; et enfin, à la limite, quand la quantité $\frac{p^2}{4} - q$ sera nulle, les deux racines deviendront égales entre elles.

Racines imaginaires.

139. Les carrés des quantités, soit positives, soit négatives, étant toujours positifs, il s'ensuit que les quantités négatives n'ont pas de racines carrées. Ainsi, lorsqu'en résolvant une équation du second degré, on est amené à extraire la racine carrée d'une quantité négative, il y a évidemment impossibilité de satisfaire à l'équation ; dans ce cas, les formules donnent des valeurs fictives qui ont été

introduites dans l'analyse mathématique sous le nom de quantités *imaginaires*.

Considérons d'abord l'équation

$$x^2 = A.$$

Quand la quantité A est positive, l'équation admet les deux solutions

$$x = \pm \sqrt{A}.$$

Mais quand la quantité A est négative, comme il n'existe aucun nombre, soit positif, soit négatif, dont le carré égale A, il y a impossibilité de satisfaire à l'équation. Cependant la formule donne des valeurs imaginaires qui satisfont également à l'équation, si l'on convient de regarder le symbole $\sqrt{A}$ comme ayant toujours son carré égal à A, quelle que soit la valeur de A, positive ou négative.

Ainsi on dira que l'équation

$$x^2 = -1$$

admet les deux solutions imaginaires

$$x = \pm \sqrt{-1}.$$

On représente ordinairement par la lettre i le symbole $\sqrt{-1}$, et l'on introduit la lettre i dans les calculs, comme si elle représentait une quantité réelle, en convenant que son carré i^2 égale -1.

Toutes les valeurs imaginaires peuvent être exprimées au moyen du symbole $\sqrt{-1}$ ou de la lettre i. Par exemple, l'équation

$$x^2 = -9$$

admet les deux solutions imaginaires

$$x = \pm \sqrt{-9}.$$

Si l'on observe que $-9 = 9 \times (-1)$ et si l'on applique

le théorème ordinaire sur la racine d'un produit, on écrira

$$\sqrt{-9}=\sqrt{9}\times\sqrt{-1}=3i,$$

d'où

$$x=\pm 3i.$$

Considérons maintenant l'équation

$$x^2-6x+13=0,$$

qui se met sous la forme

$$(x-3)^2=-4.$$

Un carré ne pouvant être égal à la quantité négative — 4, il est impossible de satisfaire à l'équation par des valeurs réelles. Mais, en extrayant la racine, on est conduit aux valeurs imaginaires

$$x-3=\pm\sqrt{-4},$$

d'où

$$x=3\pm\sqrt{-4};$$

en observant que $\sqrt{-4}=\sqrt{4}\times\sqrt{-1}=2i$, on les écrira

$$x=3\pm 2i.$$

Il en est de même de l'équation générale

$$x^2+px+q=0,$$

toutes les fois que la quantité $\frac{p^2}{4}-q$ est négative. Car, cette équation étant mise sous la forme

$$\left(x+\frac{p}{2}\right)^2=\frac{p^2}{4}-q,$$

on voit qu'il y a impossibilité d'y satisfaire par des valeurs réelles; mais on obtient les valeurs imaginaires

$$x+\frac{p}{2}=\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q},$$

qui satisfont à l'équation, en convenant, comme nous l'a-

vons dit déjà, que le carré du symbole $\sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$ égale $\frac{p^2}{4} - q$ dans tous les cas. Il en résulte pour x les deux valeurs imaginaires

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q},$$

ou

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{q - \frac{p^2}{4}} \times \sqrt{-1}.$$

On ramène ainsi ces deux valeurs à la forme $a \pm bi$, en représentant par a et b les deux quantités réelles $-\frac{p}{2}$ et $\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}$.

140. Ainsi les quantités *imaginaires* sont des expressions de la forme

$$a + bi,$$

dans laquelle les lettres a et b représentent des quantités réelles quelconques (par opposition, on dit que les quantités ordinaires, positives ou négatives, sont *réelles*). On a étendu aux quantités imaginaires les règles ordinaires du calcul algébrique, comme si la lettre i désignait une quantité réelle, en convenant de remplacer dans les résultats i^2 par -1.

En résumant ce qui précède, on voit que l'équation

$$x^2 + px + q = 0,$$

présente trois cas principaux :

1° Lorsque la quantité $\frac{p^2}{4} - q$ est *positive*, l'équation a ses deux racines *réelles* et *inégales*.

2° Lorsque la quantité $\frac{p^2}{4} - q$ est *nulle*, l'équation a ses deux racines *égales*. Ces deux racines égales sont toujours réelles ; car dans ce cas le radical est nul.

3° Lorsque la quantité $\frac{p^2}{4} - q$ est *négative*, l'équation a ses deux racines *imaginaires*.

Résolution de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$.

141. Nous avons ramené l'équation générale du second degré

$$ax^2 + bx + c = 0$$

à la forme

$$x^2 + px + q = 0,$$

en divisant tous ses termes par le premier coefficient a, et posant

$$p = \frac{b}{a}, \quad q = \frac{c}{a}.$$

Résolvant cette dernière, nous avons trouvé la formule

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

Si, dans cette formule, nous remplaçons les lettres p et q par leurs valeurs $\frac{b}{a}$ et $\frac{c}{a}$, elle devient

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}} = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Nous avons réduit au même dénominateur $4a^2$ les deux termes placés sous le radical, et nous avons extrait la racine de ce dénominateur, carré parfait. Nous obtenons ainsi la formule

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

qui est souvent usitée dans la pratique.

Elle présente les mêmes cas principaux que la formule primitive : 1° quand $b^2 - 4ac > 0$, les deux racines sont réelles et inégales ; 2° quand $b^2 - 4ac = 0$, les deux racines sont égales ; quand $b^2 - 4ac < 0$, les racines sont imaginaires.

142. Remarque. Il arrive souvent que le coefficient b contient le facteur 2. Dans ce cas, la formule peut être un peu simplifiée, ce qui la rend plus commode dans les applications. Posons $b = 2b'$, la formule devient

$$x = \frac{-2b' \pm \sqrt{4b'^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2b' \pm 2\sqrt{b'^2 - ac}}{2a},$$

et si l'on divise par 2 le numérateur et le dénominateur,

$$x = \frac{-b' \pm \sqrt{b'^2 - ac}}{a}.$$

Soit, par exemple, l'équation

$$3x^2 - 14x + 13 = 0.$$

Le second coefficient étant un nombre pair, on emploiera la dernière formule, et l'on écrira

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 39}}{3} = \frac{7 \pm \sqrt{10}}{3}.$$

Décomposition du trinôme du second degré en facteurs du premier degré.

143. Soit le trinôme

$$x^2 + px + q,$$

dans lequel nous supposerons que la lettre x désigne une grandeur quelconque et tout à fait arbitraire. Si nous ajoutons et si nous retranchons $\frac{p^2}{4}$, la valeur du trinôme ne

change pas, et l'égalité

$$x^2 + px + q = \left(x^2 + px + \frac{p^2}{4}\right) - \left(\frac{p^2}{4} - q\right),$$

est vraie, quelle que soit la valeur de x. La première parenthèse est le carré du binôme $x + \frac{p}{2}$; la seconde peut être considérée comme le carré de $\sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$. On a donc

$$x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(\sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right)^2.$$

Le second membre, qui est la différence des carrés de deux quantités, égale le produit de la somme de ces deux quantités par leur différence, et se décompose ainsi en deux facteurs du premier degré,

$$\left(x + \frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - p}\right)\left(x + \frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right).$$

Si l'on pose

$$x' = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q},$$

$$x'' = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q},$$

les deux parenthèses deviennent $x - x'$, $x - x''$, et le trinôme se met sous la forme

$$(x - x')(x - x'').$$

On peut annuler ce produit de deux manières, soit en donnant à x la valeur x', qui annule le premier facteur, soit en donnant à x la valeur x'' qui annule le second facteur; on retrouve ainsi par une autre méthode les deux racines x' et x'' de l'équation du second degré

$$x^2 + px + q = 0.$$

Cette décomposition du trinôme en deux facteurs du pre-

mier degré subsiste dans tous les cas, que les racines soient réelles ou imaginaires.

Applications. Considérons, par exemple le trinôme

$$x^2 - 7x + 10.$$

Les deux racines du trinôme, c'est-à-dire de l'équation que l'on obtient en égalant ce trinôme à zéro, sont $x' = 2$, $x'' = 5$; on a donc

$$x^2 - 7x + 10 = (x - 2)(x - 5).$$

Cette égalité est vraie, quelle que soit la valeur de x.

Soit encore le trinôme

$$x^2 + 4x - 12.$$

Les deux racines du trinôme sont $x' = -6$, $x'' = 2$. On a donc identiquement, c'est-à-dire quelle que soit la valeur de x,

$$x^2 + 4x = 12 = (x + 6)(x - 2).$$

144. La forme la plus générale du polynôme entier du second degré est

$$ax^2 + bx + c.$$

Si l'on met le coefficient a en facteur, et si l'on appelle p et q les quotients $\frac{b}{a}$ et $\frac{c}{a}$, ce polynôme s'écrit

$$ax^2 + bx + c = a(x^2 + px + q).$$

Le polynôme entre parenthèses se décomposant en deux facteurs $x - x'$ et $x - x''$, on a l'égalité

$$ax^2 + bx + c = a(x - x')(x - x''),$$

quelle que soit la valeur de x.

Les lettres x' et x'' désignent les deux racines de l'équation

$$x^2 + px + q = 0,$$

ou, ce qui est a même chose, de l'équation

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Relations entre les coefficients et les racines de l'équation du second degré.

145. En appelant x' et x'' les deux racines de l'équation

$$x^2 + px + q = 0,$$

nous avons vu que le trinôme

$$x^2 + px + q$$

peut être décomposé en deux facteurs du premier degré

$$(x - x')(x - x'').$$

Si l'on effectue la multiplication indiquée par les parenthèses, on reproduira évidemment le polynôme proposé. Le produit des deux facteurs est

$$x^2 - (x' + x'')x + x'x''.$$

Pour que ce polynôme soit le même que le polynôme

$$x^2 + px + q,$$

il faut que les coefficients soient les mêmes de part et d'autre. On a donc

$$x' + x'' = -p,$$
$$x'x'' = q.$$

Telles sont les deux relations fondamentales qui existent entre les racines de l'équation du second degré et les coefficients de l'équation; nous nous en servirons fréquemment. On les énonce ainsi : *l'équation du second degré étant ramenée à la forme*

$$x^2 + px + q = 0,$$

1° *la somme algébrique des deux racines égale le coefficient de* x *changé de signe;* 2° *leur produit égale le terme connu.*

146. Remarque. 1° Lorsque, dans l'équation du second degré

$$x^2 + px + q = 0,$$

le terme connu q est négatif, les racines sont toujours réelles

et inégales; car, dans ce cas, la quantité $\frac{p^2}{4} - q$ est essentiellement positive. En outre, ces deux racines sont de signes contraires, puisque leur produit est négatif.

Ainsi, le terme connu étant négatif, on peut dire *à priori* que l'équation

$$x^2 + 4x - 12 = 0,$$

a ses deux racines réelles et de signes contraires. La somme des deux racines étant égale à -4, la plus grande en valeur absolue est la racine négative. Et en effet, les deux racines sont -6 et $+2$, dont la somme est bien égale à -4 et le produit à -12.

2° Lorsque le terme connu est positif, il est nécessaire d'examiner le signe de la quantité $\frac{p^2}{4} - q$, pour savoir si les racines sont réelles. Quand cette quantité est positive, les deux racines sont réelles et de même signe, puisque leur produit est positif. La somme de deux racines étant égale à $-p$, ce signe commun est contraire à celui de p.

Soit, par exemple, l'équation

$$x^2 - 7x + 10 = 0.$$

La quantité $\frac{49}{4} - 10$ étant positive, les racines sont réelles. Leur produit étant positif, elles ont même signe. Leur somme étant égale à $+7$, elles sont positives. Et en effet, ces deux racines sont $+2$ et $+5$, dont la somme est $+7$ et le produit $+10$.

Soit encore l'équation

$$x^2 + 6x + 8 = 0.$$

La quantité $9 - 8$ étant positive, les racines sont réelles. Le produit étant positif, elles ont même signe. Leur somme étant égale à -6, elles sont toutes deux négatives. Et en effet, ces deux racines sont -4 et -2.

3° Lorsque le terme connu est très-petit en valeur absolue, le produit des deux racines étant très-petit, l'une d'elles a nécessairement une valeur numérique très-petite. Si le terme connu tend vers zéro, cette racine très-petite tendra aussi vers zéro. La somme des deux racines étant égale à $-p$ et l'une d'elles étant nulle, l'autre est égale à $-p$. Au reste, dans ce cas, la résolution est facile, car l'équation se réduit à

$$x^2 + px = 0,$$

et se met sous la forme

$$x(x + p) = 0.$$

On peut annuler ce produit de deux manières, en faisant, soit $x = 0$, soit $x = -p$.

Exemples.

147. Question I. Résoudre les deux équations

$$y + 2x = 5,$$
$$2y^2 - 3x^2 + 10x = 25.$$

Si de la première équation on tire la valeur de y,

$$y = 5 - 2x,$$

et qu'on la substitue dans la seconde, on arrive à l'équation du second degré

$$x^2 - 6x + 5 = 0,$$

d'où l'on déduit les deux valeurs

$$x = 1, \quad x = 5.$$

En portant successivement chacune de ces deux valeurs dans l'équation

$$y = 5 - 2x,$$

on obtient les deux valeurs correspondaantes de y

$$y = 3, \quad y = -5.$$

Ainsi, les deux équations proposées admettent les deux solutions :

$$1^{re} \text{ solution : } \quad x = 1, \quad y = 3,$$
$$2^{e} \text{ solution : } \quad x = 5, \quad y = -5.$$

En général, la résolution de deux équations à deux inconnues, l'une du premier degré, l'autre du second degré, se ramène à la résolution d'une équation du second degré à une inconnue.

148. Question II. Résoudre les deux équations

$$x + y = 8,$$
$$xy = 15.$$

Quand on connaît la somme de deux quantités et leur produit, on voit immédiatement que ces deux quantités sont les racines d'une équation du second degré, ayant pour coefficient de la première puissance de l'inconnue la somme prise avec un signe contraire, et pour terme connu le produit. Dans l'exemple actuel, les valeurs de x et de y seront les racines de l'équation

$$u^2 - 8u + 15 = 0;$$

et en effet, la somme des deux racines est égale à 8, et le produit à 15. Les deux racines de cette équation étant 3 et 5, on aura

$$x = 3, \quad y = 5,$$

ou

$$x = 5, \quad y = 3.$$

Les deux équations proposées sont *symétriques* par rapport aux deux inconnues, c'est-à-dire ne changent pas quand on permute les lettres x et y. Ceci explique pourquoi les valeurs des deux inconnues sont données par la même équation. En effet, si l'on élimine y entre les deux équations proposées, on arrive à l'équation

$$x^2 - 8x + 15 = 0.$$

A cause de la symétrie, il est clair que, si l'on éliminait x au lieu de y, on arriverait nécessairement à la même équation

$$y^2 - 8y + 15 = 0.$$

Ainsi les valeurs des deux inconnues sont données par la même équation du second degré. C'est l'équation que nous avons écrite immédiatement.

149. Question III. Résoudre les deux équations

$$y - x = 2,$$
$$xy = 15.$$

La première équation n'est pas symétrique par rapport aux lettres x et y; mais on peut la rendre symétrique en posant

$$x = -x';$$

car alors les équations deviennent

$$y + x' = 2,$$
$$x'y = -15.$$

Les valeurs des deux inconnues x' et y sont données par l'équation du second degré

$$u^2 - 2u - 15 = 0,$$

dont les racines sont -3 et $+5$. On a donc

$$x' = -3, \quad y = 5,$$

ou

$$x' = 5, \quad y = -3.$$

Ainsi les deux équations proposées admettent les deux solutions

$$x = 3, \qquad y = 5.$$
$$x = -5, \quad y = -3.$$

150. Question IV. Résoudre les deux questions

$$x + y = 8,$$
$$x^2 + y^2 = 34.$$

Si, de la première équation élevée au carré,

$$x^2 + 2xy + y^2 = 64,$$

on retranche la seconde, il vient

$$2xy = 30,$$

d'où

$$xy = 15.$$

On connaît la somme 8 des deux inconnues, et leur produit 15; la question est ramenée à la question II; les inconnues sont les racines de l'équation du second degré

$$u^2 - 8u + 15 = 0.$$

151. QUESTION V. Résoudre les deux équations

(1) $$x^2 + y^2 = 65,$$

(2) $$xy = 28.$$

Si à la première équation on ajoute la seconde multipliée par 2, il vient

$$x^2 + 2xy + y^2 = 121,$$

ou

$$(x + y)^2 = 121;$$

on déduit de là

(3) $$x + y = \pm 11.$$

Si de la première équation on retranche la seconde multipliée par 2, il vient de même

$$x^2 - 2xy + y^2 = 9.$$

ou

$$(x - y)^2 = 9;$$

on déduit de là

(4) $$x - y = \pm 3.$$

On connaît ainsi la somme et la différence des deux inconnues; il est aisé de trouver ces deux inconnues; les équations (3) et (4), ajoutées ou retranchées, donnent

$$x = \frac{\pm 11 \pm 3}{2}, \quad y = \frac{\pm 11 \mp 3}{2}.$$

Il en résulte les quatre systèmes

$$x = 7, \quad y = 4,$$
$$x = 4, \quad y = 7,$$
$$x = -7, \quad y = -4,$$
$$x = -4, \quad y = -7;$$

qui, en réalité, se réduisent à deux systèmes de valeurs égales et de signes contraires.

152. Question VI. Trouver quatre nombres en proportion, connaissant la somme des extrêmes 21, celle des moyens 19, et la somme des carrés des quatre termes 442.

Appelons x, y, z, t, les quatre nombres cherchés. Nous avons les quatre équations

$$(1) \qquad \frac{x}{y} = \frac{z}{t} \quad \text{ou} \quad xt = yz,$$

$$(2) \qquad x + t = 21,$$

$$(3) \qquad y + z = 19,$$

$$(4) \qquad x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 442.$$

Nous connaissons la somme des deux inconnues x et t, et aussi celle des deux inconnues y et z; la question serait résolue si nous connaissions leur produit commun xt ou yz. Élevons les équations (2) et (3) au carré, ajoutons-les et retranchons l'équation (4), il vient

$$2xt + 2yz = 360.$$

ou

$$4xt = 360,$$

$$xt = yz = 90.$$

Les deux inconnues x et t seront données par l'équation du second degré

$$u^2 - 21u + 90 = 0,$$

qui a pour racines 6 et 15, et les deux inconnues y et z par l'équation du second degré

$$u^2 - 19u + 90 = 0,$$

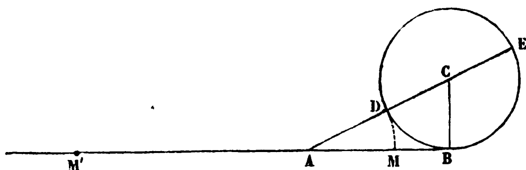
qui a pour racines 9 et 10. Les nombres cherchés sont donc

$$x = 6, \qquad t = 15,$$

$$y = 9, \qquad z = 10.$$

153. QUESTION VII. *Partager une droite donnée en moyenne et extrême raison.*

On sait que partager une droite AB en moyenne et extrême raison, c'est partager cette droite en deux parties AM et BM, telles que la plus grande AM soit moyenne proportionnelle entre la ligne entière AB et la plus petite BM.



Si donc on appelle a la longueur de la droite AB, et x celle de la plus grande partie AM, la longueur de l'autre partie sera $a - x$, et l'on aura les rapports égaux

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{a - x},$$

qui conduisent à l'équation du second degré

$$x^2 + ax - a^2 = 0,$$

d'où l'on tire

$$x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} + a^2}.$$

La première racine

$$x' = -\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} + a^2} = \frac{a}{2}(\sqrt{5} - 1)$$

est positive et moindre que a (car $\sqrt{5}$ étant plus petit que 3, $\sqrt{5} - 1$ est plus petit que 2). Elle répond directement à la question proposée et donne la plus grande partie AM de la droite AB partagée en moyenne et extrême raison. Il est aisé de déduire de cette formule la construction géométrique connue. Si au point B on élève une per-

pendiculaire BC égale à la moitié de AB, l'hypoténuse AC sera égale à $\sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}}$. Si, du point C comme centre, avec CB pour rayon, on décrit un cercle, la longueur AD sera égale à AC — CD, c'est-à-dire à $\sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} - \frac{a}{2}$; ce sera précisément la racine x'. Il suffit maintenant de prendre sur AB une longueur AM égale à AD.

La seconde racine

$$x'' = -\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} + a^2} = -\frac{a}{2}(\sqrt{5} - 1)$$

est négative et ne répond pas à la question. Cependant il est facile de lui donner une interprétation géométrique. Il suffit pour cela de modifier l'énoncé du problème de la manière suivante : *Sur la droite indéfinie* AB, *trouver un point tel que sa distance au point* A *soit moyenne proportionnelle entre la longueur* AB *et sa distance au point* B. La question ainsi posée admet deux solutions; car, outre le point M que nous venons de déterminer, il existe vers la gauche un point M' tel que la distance M'A est moyenne proportionnelle entre AB et M'B; à cette seconde solution correspond la racine négative x'' qui, devant être portée en sens inverse de la première, c'est-à-dire de droite à gauche, donne la longueur AM'.

On construira cette seconde solution de la même manière que la première; la longueur AE, étant égale à AC + CE, c'est-à-dire à $\sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} + \frac{a}{2}$, est précisément la valeur absolue de x''; on prendra donc AM' = AE.

154. QUESTION VIII. *Trouver les côtés d'un triangle rectangle, connaissant la hauteur et la différence des côtés de l'angle droit.*

Appelons x et y les deux côtés de l'angle droit, a leur différence donnée, z l'hypoténuse et h la hauteur. On a les trois équations

$$(1) \qquad x - y = a,$$

$$(2) \qquad x^2 + y^2 = z^2,$$

$$(3) \qquad xy = hz.$$

On obtient la seconde en écrivant que le carré de l'hypoténuse égale à la somme des carrés des deux côtés de l'angle droit ; la troisième, en remarquant que le double de la surface du triangle égale le produit des deux côtés de l'angle droit, ou le produit de l'hypoténuse par la hauteur.

Il est facile d'éliminer x et y entre ces trois équations. Si dans la première élevée au carré,

$$(4) \qquad x^2 + y^2 - 2xy = a^2,$$

on remplace $x^2 + y^2$ par z^2 et xy par hz, on a l'équation du second degré à une inconnue

$$(5) \qquad z^2 - 2hz - a^2 = 0,$$

dont les racines sont réelles et de signes contraires,

$$z = h \pm \sqrt{h^2 + a^2}.$$

Les côtés du triangle étant nécessairement des nombres positifs, on prendra la racine positive

$$(6) \qquad z = h + \sqrt{h^2 + a^2}.$$

Une fois l'hypoténuse z connue, on obtiendra aisément x et y. A l'équation (4), ajoutons l'équation (3) multipliée par 4, il vient

$$x^2 + y^2 + 2xy = a^2 + 4hz,$$

ou

$$(x+y)^2 = a^2 + 4hz,$$

(7) $$x + y = \sqrt{a^2 + 4hz}.$$

Cette équation donne la somme des deux côtés de l'angle droit; comme on connaît déjà leur différence, des deux côtés sont connus.

Application. $a = 1^m$, $h = 2^m,4$. La formule (6) donne $z = 5$; la formule (7) donne $x + y = 7$; comme on a déjà $x - y = 1$, il en résulte $x = 4$, $y = 3$.

155. QUESTION IX. ***Trouver la profondeur d'un puits, en y laissant tomber une pierre, et notant le temps qui s'écoule entre le moment où on lâche la pierre et celui où l'on entend le bruit que fait la pierre en arrivant au fond du puits.***

Appelons x la profondeur du puits et t le temps que la pierre met à arriver au fond du puits. On sait que les corps en tombant parcourent des espaces proportionnels aux carrés des temps, de sorte que l'espace x parcouru par la pierre en t secondes sera $x = \frac{gt^2}{2}$, $\frac{g}{2}$ représentant l'espace parcouru dans la première seconde; on en déduit $t = \sqrt{\frac{2x}{g}}$. D'autre part, on sait que le son se progage uniformément avec une vitesse de 340 mètres par seconde, vitesse que nous appellerons v; ainsi le temps que met le son à remonter du fond du puits pour arriver à l'oreille est $\frac{x}{v}$. Mais le temps observé a est égal au temps que met la pierre à arriver au fonds du puits, plus celui que le son emploie à revenir jusqu'en haut. On a donc l'équation

(1) $$\sqrt{\frac{2x}{g}} + \frac{x}{v} = a.$$

Si l'on fait passer le terme $\frac{x}{v}$ dans le second membre, l'équation devient

$$(2) \qquad \sqrt{\frac{2x}{g}} = a - \frac{x}{v}.$$

Si l'on élève les deux membres au carré, le radical disparaît et l'on obtient l'équation du second degré

$$(3) \qquad \frac{2x}{g} = \left(a - \frac{x}{v}\right)^2,$$

ou, en développant, et multipliant par v^2,

$$(4) \qquad x^2 - 2v\left(a + \frac{v}{g}\right)x + a^2v^2 = 0.$$

On en déduit

$$(5) \qquad x = v\left(a + \frac{v}{g}\right) \pm v\sqrt{\left(a + \frac{v}{g}\right)^2 - a^2},$$

ou, en simplifiant,

$$(6) \qquad x = v\left[a + \frac{v}{g} \pm \sqrt{\frac{v}{g}\left(\frac{v}{g} + 2a\right)}\right].$$

On voit que les racines sont réelles; elles sont positives, puisque leur somme et leur produit sont positifs.

Il est évident *à priori* que la question proposée admet toujours une solution et n'en admet qu'une; voici d'où proviennent les deux racines positives. L'équation du problème est l'équation (1) ou l'équation (2); or nous remarquons que l'équation (3), obtenue par l'élévation au carré, n'est pas équivalente à l'équation (2); car, si l'on élève au carré les deux membres de l'équation

$$(7) \qquad -\sqrt{\frac{2x}{g}} = a - \frac{x}{v},$$

on obtient la même équation (3). Ainsi l'équation (3) comprend, non-seulement les solutions de l'équation (2), mais

encore celles de l'équation (7). Il faut donc examiner quelle est celle des racines trouvées qui convient à la question. La première, celle qui est donnée par le signe $+$ placé devant le radical, ayant une valeur plus grande que av, rend négative l'expression $a-\frac{x}{v}$, et satisfait par conséquent, non à l'équation (2), mais à l'équation (7); elle doit être rejetée.

L'autre racine

$$(8) \qquad x=v\left[a+\frac{v}{g}-\sqrt{\frac{v}{g}\left(\frac{v}{g}+2a\right)}\right]$$

a une valeur moindre que av; car la valeur du radical étant plus grande que $\frac{v}{g}$, la parenthèse est moindre que a; elle satisfait donc à l'équation (2), c'est-à-dire à l'équation du problème. Ainsi la profondeur du puits est donnée par la formule (8).

156. Remarque. Pour résoudre la question précédente, nous avons élevé au carré les deux membres d'une équation irrationnelle, ce qui nous a conduit à une équation entière du second degré, qui n'est pas équivalente à l'équation proposée.

Représentons d'une manière générale par

$$(1) \qquad A=B$$

une équation quelconque. Si l'on élève les deux membres au carré, on obtient une équation

$$(2) \qquad A^2=B^2,$$

qui, outre les solutions de l'équation (1), admet celle de l'équation

$$(3) \qquad A=-B.$$

Il est clair que, si l'une ou l'autre des équations (1) et (3) est vérifiée, l'équation (2) l'est également, et que, réciproquement, si l'équation (2) est vérifiée, l'une ou l'autre des équations (1) et (3) est satisfaite.

Considérons, par exemple, l'équation

$$(1) \qquad x - 1 = \sqrt{3x - 5}.$$

Si l'on élève les deux membres au carré, on obtient l'équation du second degré

$$(2) \qquad x^2 - 5x + 6 = 0,$$

qui admet, non-seulement les racines de l'équation (1) mais encore celles de l'équation conjuguée

$$(3) \qquad x - 1 = -\sqrt{3x - 5}.$$

Les deux racines de l'équation (2) sont $x = 2$ et $x = 3$; chacune d'elles rend positif le premier membre de l'équation (1), elles conviennent donc toutes les deux à l'équation (1) et aucune d'elles ne vérifie l'équation (3). Ici, l'équation (2) est équivalente à l'équation (1).

De même, si l'on voulait résoudre l'équation

$$(4) \qquad 1 - x = \sqrt{3x - 5},$$

qui est la même que l'équation (3), on serait encore amené à l'équation (2); les deux racines, rendant négatif le premier membre de l'équation (4), conviennent à l'équation conjuguée (1); on en conclut que l'équation proposée (4) n'admet aucune solution.

Considérons encore l'équation irrationnelle

$$(5) \qquad x - 1 = \sqrt{x^2 - 3},$$

qui, par l'élévation au carré, conduit à l'équation du premier degré

$$x = 2.$$

Cette valeur $x = 2$, rendant positif le premier membre, convient à l'équation proposée. L'équation conjuguée

$$x - 1 = -\sqrt{x^2 - 3}$$

ou

$$1 - x = \sqrt{x^2 - 3}$$

n'admet aucune solution.

Changement de signe du trinôme du second degré.

157. Reprenons l'étude du trinôme du second degré $ax^2 + bx + c$, dans lequel la lettre x a une valeur quelconque. On mettra d'abord ce trinôme sous la forme $a(x^2 + px + q)$. Si, dans la parenthèse, on ajoute et on retranche $\frac{p^2}{4}$, afin de compléter le carré dont $x^2 + px$ sont les deux premiers termes (comme nous l'avons fait au n° **143**), on a

$$ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right)\right].$$

Il y a trois cas principaux à considérer :

1° Supposons que la quantité $\frac{p^2}{4} - q$ soit négative, ou la qu.. tité $q - \frac{p^2}{4}$ positive, c'est-à-dire que les racines du trinô e soient imaginaires. La parenthèse, étant la somme de deux quantités positives, reste toujours positive, et par conséquent le trinôme conserve le signe de son premier coefficient a, quelle que soit la valeur attribuée à x.

2° Lorsque la quantité $\frac{p^2}{4} - q$ est nulle, c'est-à-dire quand les racines sont égales, la parenthèse est un carré parfait, et l'on a

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{p}{2}\right)^2.$$

Le trinôme conserve encore le signe de son premier coefficient a, quelle que soit la valeur de x; cependant le trinôme s'annule pour $x = -\frac{p}{2}$.

3° Lorsque la quantité $\frac{p^2}{4} - q$ est positive, c'est-à-dire lorsque les racines sont réelles et inégales, le trinôme se décompose en facteurs réels du premier degré, et l'on a (n° 144)

$$ax^2 + bx + c = a(x - x')(x - x'');$$

nous appelons x' la plus petite racine, x'' la plus grande. Quand la valeur de x est comprise entre x' et x'', le facteur $x - x'$ étant positif, le facteur $x - x''$ négatif, leur produit est négatif et le trinôme a un signe contraire à celui de a. Quand la valeur de x est plus grande que x'', les deux facteurs $x - x'$, $x - x''$ étant positifs, leur produit est lui-même positif et le trinôme a le même signe que a. Quand la valeur de x est plus petite que x', les deux facteurs étant négatifs, leur produit est positif et le trinôme a encore le signe a. En résumé, le trinôme a un signe contraire à celui de a pour toutes les valeurs de x comprises entre les deux racines x' et x'', et il a le même signe que a pour toutes les valeurs de x non comprises entre les racines, c'est-à-dire plus grandes que la plus grande ou plus petites que la plus petite. Il change donc deux fois de signe; une première fois quand x passe par la racine x', une seconde fois quand x passe par la racine x'', et ces changements de signe s'opèrent quand le trinôme s'annule.

Ainsi, *lorsque les racines sont égales ou imaginaires, le trinôme du second degré conserve toujours le signe de son premier coefficient* a, *quelle que soit la valeur attribuée à la variable* x; *mais quand les racines sont réelles et inégales, le trinôme, ayant un signe contraire à celui de* a *pour les valeurs*

de x comprises entre les deux racines, et le même signe que a pour toutes les valeurs de x non comprises entre les racines, éprouve deux changements de signe.

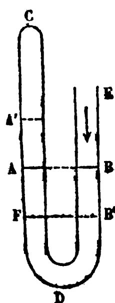
158. Remarque. D'après cela, si pour deux valeurs particulières attribuées à x, le trinôme acquiert des valeurs de signes contraires, on peut affirmer que les racines sont réelles et que l'une d'elles est comprise entre les deux valeurs attribuées à x. Soit, par exemple, le trinôme

$$x^2 - 4x + 3.$$

Si l'on donne à x les valeurs 0 et 2, le trinôme acquiert les valeurs de signes contraires $+3$ et -1; on en conclut d'abord que les racines du trinôme sont réelles et inégales; car, si elles étaient égales ou imaginaires, le trinôme n'éprouverait pas de changement de signe; en outre la valeur 2 attribuée à x, donnant un résultat négatif, et par conséquent de signe contraire au premier coefficient qui est ici égal à $+1$, est comprise entre les deux racines x' et x''; la valeur 0 qui donne un résultat positif est inférieure à la plus petite racine x'; il en résulte que la plus petite racine x' est comprise entre 0 et 2, et la plus grande x'' supérieure à 2. Effectivement ces deux racines sont 1 et 3.

Cette remarque facilite beaucoup la discussion d'un grand nombre de problèmes. En voici un exemple.

159. Question X. Le manomètre à air, servant à indiquer la tension de la vapeur dans les machines à vapeur, se compose d'un tube recourbé, fermé à une de ses extrémités C, et ouvert à l'autre extrémité E; le fond du tube ADB est rempli de mercure jusqu'à une certaine hauteur; la capacité fermée AC est remplie d'air, et la vapeur, s'introduisant par la branche ouverte E, exerce sa pression sur le sommet B de la colonne de mercure. On suppose que les deux sommets A



et B de la colonne de mercure sont au même niveau quand la tension de la vapeur est égale à une atmosphère. Si a tension de la vapeur augmente, il est clair que le sommet A de la colonne de mercure s'élève en A', tandis que le sommet B s'abaisse en B'. Il s'agit de déterminer le déplacement de la colonne de mercure pour une tension donnée de la vapeur.

Nous supposons que le tube a partout même section. Appelons a la longueur AC, x le déplacement AA' ou BB' de la colonne de mercure. Si nous évaluons les tensions par des colonnes de mercure, la pression atmosphérique sera représentée par la hauteur h de la colonne barométrique ($h = 0^{m},760$). Quand la tension de la vapeur devient égale à n atmosphères, elle exerce une pression marquée par nh au sommet B' de la colonne de mercure ; la pression est la même dans l'autre branche, en F, au même niveau, Mais la pression en F est égale au poids de la colonne de mercure FA' ou $2x$, augmenté de la tension de l'air qui occupe alors l'espace A'C. Quand l'air occupait le volume AC, sa tension était égale à la pression atmosphérique h ; sous le volume A'C, cette tension devient, d'après la loi de Mariotte, $h\dfrac{a}{a-x}$. On a donc l'équation

$$2x + \frac{ah}{a-x} = nh,$$

ou

$$2x^2 - (2a + nh)x + (n-1)ah = 0.$$

Il est évident, d'après la nature de la question, que si la tension de la vapeur est plus grande qu'une atmosphère, c'est-à-dire si $n > 1$, la colonne de mercure s'élèvera dans la branche fermée d'une quantité AA' plus petite que AC ; l'inconnue x doit donc admettre une valeur positive plus petite que a. On peut aisément le vérifier sur l'équation (1) ;

car si l'on donne à x successivement les valeurs o et a, le premier membre de l'équation, ou le trinôme du second degré, prend des valeurs de signes contraires $+(n-1)ah$ et $-ah$; d'après ce que nous avons dit, on en conclut que les deux racines de l'équation sont réelles, et que l'une d'elles est comprise entre o et a; c'est la plus petite, puisque la valeur a, qui donne un résultat négatif, est comprise entre les deux racines; l'autre racine, étant positive et plus grande que a, ne convient pas à la question. On a donc

$$x=\frac{2a+nh-\sqrt{(2a+nh)^2-8(n-1)ah}}{4},$$

ou, en simplifiant la quantité placée sous le radical,

$$(2)\qquad x=\frac{2a+nh-\sqrt{(2a-nh)^2+8ah}}{4}.$$

Lorsque la tension de la vapeur est moindre qu'une atmosphère, c'est-à-dire lorsque $n<1$, le sommet A de la colonne de mercure s'abaisse, tandis que le sommet B s'élève; l'inconnue x a dans ce cas une valeur négative. On voit en effet que l'équation admet deux racines réelles de signes contraires, puisque le dernier terme est négatif; la somme algébrique des racines étant égale à $a+\frac{nh}{2}$, la racine positive est plus grande que a et ne convient pas à la question. La formule (2) donne donc la solution de la question dans tous les cas.

Cas où, dans l'équation du second degré, le terme constant a une valeur très-petite.

160. Supposons que, dans l'équation du second degré

$$ax^2+bx+c=0,$$

le terme constant c soit très-petit en valeur absolue par rapport au coefficient a. Nous supposerons aussi la quantité b^2-4ac positive afin que les racines soient réelles. Si l'on divise tous les termes par le premier coefficient a, l'équation devient

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0.$$

Le produit des racines étant égal à $\frac{c}{a}$, et par conséquent très-petit en valeur absolue, l'une des racines x' sera très-petite en valeur absolue. La somme des racines étant égale à $-\frac{b}{a}$, l'autre racine x'' différera très-peu de $-\frac{b}{a}$. Si l'on conçoit que la valeur absolue du terme c diminue de plus en plus et tende vers zéro, le produit des racines tendant vers zéro, la racine très petite x' tendra aussi vers zéro, tandis que l'autre racine x'' tendra vers la quantité fixe $-\frac{b}{a}$.

Il est facile de distinguer ces deux racines sur les formules. Pour fixer les idées, supposons que le coefficient b ait une valeur positive; la quantité b^2-4ac différant très-peu de b^2, la valeur du radical $\sqrt{b^2-4ac}$ différera très-peu de la quantité positive b; si l'on pose

$$x'=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

$$x''=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

On voit que la racine x' est très-petite en valeur absolue et que la racine x'' diffère très-peu de $-\frac{b}{a}$.

Dans ce qui précède, nous avons supposé le terme c très-petit par rapport au coefficient a; si les deux coefficients b

et c étaient tous deux très-petits par rapport à a, le produit des racines étant très-petit ainsi que leur somme, il est clair que les deux racines seraient très-petites en valeur absolue. Si les deux coefficients b et c tendaient vers zéro, les deux racines tendraient simultanément vers zéro.

Cas où le coefficient du premier terme a une valeur très-petite.

161. Examinons ce qui a lieu, lorsque, dans l'équation du second degré

$$(1) \qquad ax^2 + bx + c = 0,$$

le premier coefficient a est très-petit en valeur absolue par rapport à c. Nous supposerons encore la quantité $b^2 - 4ac$ positive, afin que les racines soient réelles. Le produit des racines $\frac{c}{a}$ étant très-grand en valeur absolue, l'une des racines est très-grande en valeur absolue; mais on ne voit pas ce que devient l'autre racine. On reconnaît mieux les propriétés des racines en transformant l'équation.

Si l'on pose $x = \frac{1}{y}$, en prenant y comme nouvelle inconnue, l'équation (1) devient

$$(2) \qquad cy^2 + by + a = 0;$$

le terme constant a étant très-petit en valeur absolue par rapport au coefficient c, on sait que l'une des racines y' de l'équation (2) est très-petite en valeur absolue, et que l'autre racine y'' diffère très-peu de $-\frac{b}{c}$. Les deux valeurs de x, qui vérifient l'équation proposée, sont $x' = \frac{1}{y'}$, $x'' = \frac{1}{y''}$; la première est très-grande en valeur absolue, la seconde dif-

fère très-peu de $-\frac{c}{b}$. Si l'on imagine que le coefficient a diminue de plus en plus et tende vers zéro, puisque y' tend vers zéro, la première racine x' augmentera indéfiniment en valeur absolue, l'autre racine x'' tendra vers la quantité $-\frac{c}{b}$.

On arrive aux mêmes conséquences à l'aide des formules. Supposons encore le coefficient b positif, et désignons par x' et x'' les deux racines

$$x' = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

$$x'' = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Le coefficient a étant très-petit, la quantité $b^2 - 4ac$ différera très-peu de b^2, et $\sqrt{b^2 - 4ac}$ de b; le numérateur de x' sera à peu près égal à $-2b$. Le dénominateur $2a$ étant très-petit, le quotient sera très-grand, et la racine x' aura une valeur très-grande, abstraction faite du signe. On voit ainsi que, lorsque le coefficient a diminue et tend vers zéro, cette racine croît indéfiniment en valeur absolue.

L'autre racine x'' conserve au contraire une valeur finie et tend vers la valeur $-\frac{c}{b}$, quand a tend vers zéro. On remarque d'abord que le numérateur, étant à peu près égal à $-b + b$, a une valeur plus petite. Cette racine est donc le quotient de deux quantités très-petites, et elle se présente sous la forme $\frac{0}{0}$, quand a tend vers zéro. Afin de reconnaître sa valeur, nous transformerons cette expression en multipliant son numérateur et son dénominateur par $-b - \sqrt{b^2 - 4ac}$, ce qui donne

$$x'' = \frac{\left(-b + \sqrt{b^2 - 4ac}\right)\left(-b - \sqrt{b^2 - 4ac}\right)}{2a\left(-b - \sqrt{b^2 - 4ac}\right)}.$$

Au numérateur, la première parenthèse étant la somme des deux quantités $-b$ et $\sqrt{b^2-4ac}$, la seconde la différence de ces deux mêmes quantités, le produit des deux parenthèses égale la différence des carrés, et l'on a

$$x'' = \frac{b^2-(b^2-4ac)}{2a\left(-b-\sqrt{b^2-4ac}\right)} = \frac{4ac}{2a\left(-b-\sqrt{b^2-4ac}\right)}.$$

Si l'on supprime maintenant le facteur commun $2a$, qui rend les deux termes de la fraction très-petits, il vient

$$x'' = -\frac{2c}{b+\sqrt{b^2-4ac}}.$$

L'expression mise sous cette forme, toute difficulté disparaît; le dénominateur différant très-peu de $2b$, la valeur de x'' est à peu près égale à $-\frac{c}{b}$, et, quand a tend vers zéro, cette racine tend elle-même vers la valeur finie $-\frac{c}{b}$.

Au reste, lorsque a tend vers zéro, l'équation du second degré se réduit à une équation du premier degré

$$bx+c=0.$$

La racine $x''=-\frac{c}{b}$ est précisément la solution de cette équation du premier degré. L'autre racine x', devenant infinie, disparaît.

Si les deux coefficients a et b étaient très-petits en valeur absolue par rapport à c, les deux racines de l'équation (2) étant très-petites en valeur absolue, les deux racines de l'équation (1) seraient très-grandes.

* *Calcul numérique des racines quand l'un des coefficients* c *ou* a *est très-petit.*

162. Nous avons dit que lorsque, dans l'équation

$$ax^2+bx+c=0,$$

le terme connu c est très-petit en valeur absolue par rapport au coefficient a, l'une des racines est très-petite en valeur absolue. Nous indiquerons un moyen rapide de calculer approximativement cette racine. En faisant passer les termes $ax^2 + c$ dans le second membre, nous mettrons l'équation sous la forme

$$x = -\frac{c}{b} - \frac{a}{b}x^2;$$

si l'on pose, pour abréger,

$$\alpha = -\frac{c}{b}, \ \beta = -\frac{a}{b},$$

cette équation devient

$$(1) \qquad x = \alpha + \beta x^2.$$

D'après l'hypothèse faite, la quantité α est très-petite en valeur absolue, et le coefficient β, sans être petit, n'est pas très-grand. Le second terme βx^2 a une valeur très-petite relativement à celle de x; car le rapport de ce terme à x est égal à la quantité très-petite βx; si donc on néglige ce terme, on a une première valeur approchée de l'inconnue

$$x_1 = \alpha.$$

Si maintenant, dans le second membre de l'équation (1), on remplace x par sa valeur approchée α, on obtient une seconde valeur

$$x_2 = \alpha + \beta\alpha^2,$$

beaucoup plus approchée que la première. Ordinairement, dans la pratique, cette seconde valeur est suffisamment approchée. Cependant, si l'on veut une approximation encore plus grande, on la substituera dans le second membre de l'équation (1), ce qui donnera une troisième valeur encore plus approchée, et ainsi de suite.

163. Lorsque, dans l'équation

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

le premier coefficient a est très-petit en valeur absolue par rapport à c, nous savons que l'une des racines est très-grande en valeur absolue, tandis que l'autre conserve une valeur finie. On peut calculer approximativement cette seconde racine par la méthode indiquée précédemment. En effet, si l'on met l'équation sous la forme

$$x = -\frac{c}{b} - \frac{a}{b}x^2,$$

ou

$$(1) \qquad x = \alpha + \beta x^2,$$

on remarque que le coefficient β est très-petit en valeur absolue et que la quantité α n'est pas très-grande. Le second terme βx^2 a une valeur très-petite relativement à celle de x; car le rapport de βx^2 à x est βx, quantité très-petite. Si donc on néglige ce second terme, on aura une première valeur approchée de l'inconnue

$$x = \alpha.$$

Si maintenant, dans le second membre de l'équation (1), on remplace x par sa valeur approchée α, on obtiendra une seconde valeur

$$x_2 = \alpha + \beta\alpha^2,$$

beaucoup plus approchée que la première, et ainsi de suite. Cette méthode est connue sous le nom de méthode des *approximations successives*. On l'emploie fréquemment en astronomie. Quelques exemples en feront bien comprendre l'usage.

Exemples.

1° Soit l'équation

$$x^2 + x - 0,001 = 0.$$

Le terme connu ayant une valeur très-petite, l'une des racines est très-petite en valeur absolue, l'autre voisine de -1. Pour calculer la première racine, nous écrirons l'équation sous la forme

$$x = 0,001 - x^2.$$

Négligeant le second terme qui a une valeur très-petite relativement à x, nous avons une première valeur

$$x_1 = 0,001$$

approchée par excès. Substituant dans le second membre cette première valeur approchée, nous aurons une seconde valeur

$$x_2 = 0,001 - 0,000001 = 0,000999,$$

approchée par défaut. En remplaçant dans le second membre x par cette seconde valeur approchée x_2, on aurait une troisième valeur approchée par excès, et ainsi de suite. Nous bornant à la seconde approximation, nous prendrons pour valeur de la racine cherchée

$$x = 0,000999.$$

La somme des racines étant égale à -1, l'autre racine a pour valeur approchée $-1,000999$.

2° Soit l'équation

$$0,001x^2 + x - 1 = 0.$$

Le coefficient de x^2 étant très-petit, l'une des racines est très-grande en valeur absolue, tandis que l'autre diffère peu de 1. Pour calculer celle-ci, nous écrirons l'équation sous la forme

$$x = 1 - 0,001x^2.$$

Négligeant le second terme, qui a une valeur très-petite relativement à x, nous avons la première valeur

$$x_1 = 1,$$

approchée par excès. Substituant dans le second membre cette première valeur approchée, nous avons la seconde

valeur

$$x = 1 - 0{,}001 = 0{,}999$$

approchée par défaut, et ainsi de suite.

Nous arrêtant à la seconde approximation, nous prendrons pour valeur de la racine cherchée $x = 0{,}999$.

L'équation admet une autre racine, très-grande en valeur absolue. La somme des deux racines étant égale à $-\frac{1}{0{,}001}$, c'est-à-dire à -1000, nous aurons pour valeur approchée de cette seconde racine

$$x = -1000 - 0{,}999 = -1000{,}999.$$

3° Soit l'équation

$$0{,}03x^2 - 5x + 7 = 0,$$

ou

$$x = \frac{7}{5} + \frac{0{,}03}{5}x^2 = 1{,}4 + 0{,}006x^2.$$

Première valeur approchée par défaut

$$x_1 = 1{,}4.$$

Seconde valeur aussi approchée par défaut

$$x_2 = 1{,}4 + 0{,}006 \times \overline{1{,}4}^2 = 1{,}41176,$$

ou, plus simplement $x = 1{,}412$.

La somme des racines étant égale à $\frac{5}{0{,}03}$ ou à $166{,}667$, la plus grande racine est approximativement $165{,}255$.

4° Nous avons vu que la profondeur d'un puits déterminée par la chute d'une pierre (n° 155), est donnée par la plus petite racine de l'équation

$$\frac{x^2}{v^2} - 2\left(a + \frac{v}{g}\right)\frac{x}{v} + a^2 = 0;$$

d'où

$$\frac{x}{v} = \frac{a^2}{2\left(a + \frac{v}{g}\right)} + \frac{1}{2\left(a + \frac{v}{g}\right)}\frac{x^2}{v^2}.$$

La vitesse c du son est de 340 mètres par seconde, la constante g est égale à 9,8088. Ordinairement la quantité $\frac{x}{v}$ est une fraction assez petite ; car les puits les plus profonds dépassent rarement 100 mètres, le second terme du second membre sera donc très-petit par rapport au premier terme. En le négligeant, on aura une première valeur approchée

$$\frac{x}{v} = \frac{a^2}{2\left(a + \frac{v}{g}\right)}.$$

On obtiendra ensuite des valeurs de plus en plus rapprochées par la méthode des approximations successives.

Supposons, par exemple, qu'il se soit écoulé 5 secondes entre le moment où on a lâché la pierre et celui où le bruit est arrivé à l'oreille. On trouvera, pour la première valeur approchée

$$\frac{x}{v} = \frac{25}{2(5 + 34,663)} = 0,31515.$$

On remplacera ensuite $\frac{x}{v}$ par cette valeur dans le second membre de l'équation, et l'on aura pour seconde valeur approchée

$$\frac{x}{v} = 0,31515 + 0,00125 = 0,3164,$$

d'où

$$x = 107^{\text{m}},6.$$

5° Soit l'équation

$$x^2 + 2x - 0,1 = 0,$$

que l'on écrira sous la forme $x = 0,05 - \frac{x^2}{2}$.

La petite racine a pour première valeur approchée

$$x = 0,05,$$

pour seconde valeur approchée

$$x = 0,05 - 0,00125 = 0,04875.$$

CHAPITRE III.

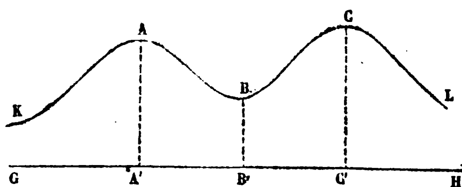
DES QUESTIONS DE MAXIMUM ET DE MINIMUM QUI PEUVENT SE RÉSOUDRE PAR LES ÉQUATIONS DU SECOND DEGRÉ.

---

164. Lorsqu'une grandeur variable, après avoir augmenté pendant un certain temps, diminue ensuite, elle passe par une valeur plus grande que les valeurs voisines, celles qui précèdent et celles qui suivent immédiatement; on dit qu'elle passe par un *maximum*.

Au contraire, lorsqu'une grandeur variable, après avoir diminué pendant un certain temps, augmente ensuite, elle passe par une valeur plus petite que les valeurs voisines, celles qui précèdent et celles qui suivent immédiatement; on dit dans ce cas qu'elle passe par un *minimum*.

Considérons, par exemple, la section par un plan vertical d'un terrain accidenté, et supposons que l'on mesure



les hauteurs des différents points de cette courbe au-dessus du plan horizontal GH. Le sommet A d'une colline sera un maximum, le fond B d'une vallée un minimum. Si l'on parcourt cette ligne dans le sens KL, après s'être élevé jusqu'au point A, on descendra ensuite de A vers B; la hau-

teur AA′ du point A est plus grande que celle des points voisins, d'un côté ou de l'autre; c'est un maximum. En continuant le mouvement, on descendra jusqu'au point B pour monter ensuite de B vers C; la hauteer BB′ du point B est plus petite que celle des points voisins, d'un côté ou de l'autre; c'est un minimum. On trouve ensuite un nouveau maximum CC′, etc.

Nous étudierons quelques questions simples qui peuvent être résolues par des polynômes ou des équations du second degré.

165. QUESTION I. *Étudier la variation du produit de deux nombres dont la somme est constante.*

Première méthode. Appelons a la somme donnée, x l'un des nombres variables; l'autre sera $a - x$ et le produit x aura pour valeur

$$y = x(a - x).$$

Faisons varier x de o à a; quand $x = 0$, le produit y est nul; quand x atteint la valeur a, le produit redevient nul. Ainsi la quantité y est partie de zéro pour revenir à zéro; dans l'intervalle elle a pris une série de valeurs positives finies; elle a augmenté d'abord pour diminuer ensuite; elle a donc passé par un *maximum.*

Pour étudier la variation de ce produit, nous l'écrirons sous la forme suivante

$$y = ax - x^2 = \frac{a^2}{4} - \left(x^2 - ax + \frac{a^2}{4}\right) = \frac{a^2}{4} - \left(\frac{a}{2} - x\right)^2.$$

La quantité y est la différence de deux quantités positives, l'une fixe, l'autre variable; elle atteint sa plus grande valeur ou son maximum $\frac{a^2}{4}$, quand le terme à retrancher $\left(\frac{a}{2} - x\right)^2$ est nul, c'est-à-dire lorsque $x = \frac{a}{2}$, et alors l'autre partie

$a - x$ est aussi égale à $\frac{a}{2}$. Ainsi, *le produit de deux facteurs, dont la somme est constante, est maximum, quand ces deux facteurs sont égaux entre eux.*

Il est facile de suivre les variations qu'éprouve le produit y quand x varie de o à a. Quand x croît d'une manière continue de o à $\frac{a}{2}$, le terme à retrancher $\left(\frac{a}{2} - x\right)^2$ diminuant de plus en plus, la quantité y augmente d'une manière continue de zéro à la valeur maximum $\frac{a^2}{4}$; quand x dépasse $\frac{a}{2}$ et varie de $\frac{a}{2}$ à a, le terme à retrancher $\left(\frac{a}{2} - x\right)^2$ ou $\left(x - \frac{a}{2}\right)^2$ augmentant de plus en plus, y diminue au contraire de $\frac{a^2}{4}$ à zéro. Si l'on fait croître x au delà de a, l'autre partie $a - x$ devient négative et croît en valeur absolue, leur produit $x(a - x)$ devient négatif et croît aussi en valeur absolue; donc la valeur relative de y diminue indéfiniment. Il en est de même si l'on donne à x des valeurs négatives.

A cette question abstraite correspond la question géométrique suivante : *Étudier la variation de la surface d'un rectangle dont le périmètre est donné.* Car si l'on appelle $2a$ le périmètre donné, x la base, $a - x$ étant la hauteur, la surface sera représentée par le produit $x(a - x)$ de deux facteurs dont la somme est constante. Nous avons vu que ce produit acquiert sa valeur maximum quand les deux facteurs sont égaux entre eux; ainsi, de tous les rectangles de même périmètre, le plus grand est le carré.

Il est aisé de suivre la variation du rectangle : quand $x = 0$, la hauteur est égale à a et le rectangle se réduit à une ligne droite de longueur a; l'aire est nulle. Si l'on

fait croître la base x de o à $\frac{a}{2}$, l'aire augmente progressivement de o à la valeur maximum $\frac{a^2}{4}$. La base x continuant à croître de $\frac{a}{2}$ à a, l'aire diminue de cette valeur maximum à o; à la fin, quand $x = a$, la hauteur étant nulle, le rectangle se réduit de nouveau à une ligne droite, et l'aire redevient nulle. Dans cette question géométrique, la variable x ne peut ni dépasser a ni prendre des valeurs négatives.

A la même question se rattache encore cet autre problème de géométrie: *Étudier la variation de la surface d'un triangle de base et de périmètre constants.* Si l'on appelle $2p$ le périmètre donné, a le côté constant, b et c les deux côtés variables, on sait que la surface du triangle est exprimée par la formule

$$\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Nous pouvons faire abstraction des deux facteurs constants p, $p-a$ et considérer seulement les deux facteurs variables $p-b$, $p-c$, dont la somme $2p-b-c$ ou a est constante. Si l'on représente par x le premier facteur, le second étant $a-x$, on a à considérer le produit $x(a-x)$; d'ailleurs x varie de o à a; le produit acquiert sa valeur maximum quand les deux facteurs sont égaux entre eux; il s'ensuit que le triangle maximum est le triangle *isocèle*. Plus les deux côtés variables diffèrent entre eux, plus la surface du triangle est petite.

166. *Deuxième méthode.* On peut traiter la question précédente par une autre méthode dont nous nous servirons par la suite; proposons-nous d'abord la question suivante: *Partager le nombre* a *en deux parties dont le produit soit*

égal à une quantité donnée m. Si l'on désigne ces deux parties par x et y, on a les deux équations

$$x + y = a,$$
$$xy = m.$$

On connaît la somme et le produit des deux inconnues x et y ; par conséquent ces deux inconnues sont les deux racines de l'équation du second degré

$$u^2 - au + m = 0.$$

Ainsi les valeurs de x et de y sont données par la formule

$$u = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - m}\,;$$

l'une des racines est la valeur de x, l'autre celle de y.

La question n'est possible que si les racines sont réelles ; il faut donc que la quantité placée sous le radical soit positive, c'est-à-dire que le produit m soit moindre que $\frac{a^2}{4}$. D'autre part, on peut donner à m une valeur quelconque moindre que $\frac{a^2}{4}$; car à une telle valeur correspondent deux racines réelles, c'est-à-dire un mode de partage qui la fournit. Ainsi le produit m prend toutes les valeurs plus petites que $\frac{a^2}{4}$, et n'en prend aucune plus grande ; sa valeur la plus grande, ou son maximum, est $\frac{a^2}{4}$. Mais, lorsque $m = \frac{a^2}{4}$, le radical est nul et les deux racines sont égales ; le produit acquiert donc sa valeur maximum, quand on partage le nombre a en deux parties égales.

167. Question II. *Étudier la variation de la somme des carrés de deux nombres dont la somme est constante.*

Première méthode. Appelons a la somme donnée, x l'un des nombres variables, l'autre sera $a-x$ et la somme y de leurs carrés sera représentée par

$$y=x^2+(a-x)^2.$$

Cette expression peut être mise sous la forme suivante

$$y=2x^2-2ax+a^2=2\left(x^2-ax+\frac{a^2}{2}\right)=2\left[\left(x^2-ax+\frac{a^2}{4}\right)+\left(\frac{a^2}{2}-\frac{a^2}{4}\right)\right]$$

ou

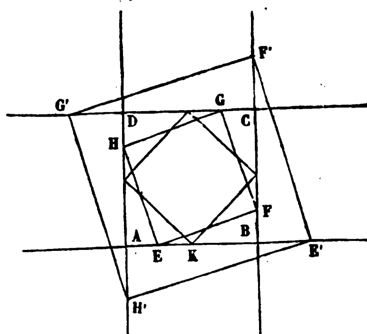
$$y=\frac{a^2}{2}+2\left(\frac{a}{2}-x\right)^2.$$

La quantité y est la somme de deux quantités positives, l'une fixe, l'autre variable. Si l'on fait croître x de o à $\frac{a}{2}$, le terme variable diminuant, y diminue de a^2 à $\frac{a^2}{2}$; x continuant à croître de $\frac{a}{2}$ à a, le terme variable $2\left(x-\frac{a}{2}\right)^2$ augmentant, y augmente de $\frac{a^2}{2}$ à a^2. Ainsi, la quantité y diminue d'abord pour augmenter ensuite; elle passe donc par un minimum. Ce minimum $\frac{a^2}{2}$ a lieu pour $x=\frac{a}{2}$, c'est-à dire quand on partage le nombre donné a en deux parties égales.

Si l'on fait croître x au delà de a, l'autre partie $a-x$ devient négative, mais son carré reste positif, et la somme augmente indéfiniment. Il en est de même si l'on donne à x des valeurs négatives.

A cette question algébrique se rattache l'*étude de la variation du carré inscrit dans un carré donné.* Si sur les côtés

du carré donné ACBD, à partir des sommets et en tournant dans le même sens, on porte quatre longueurs égales AE, BF, CG, DH, et si l'on joint les points ainsi obtenus, on forme un carré inscrit EFGH. Appelons a le côté du carré donné, x la longueur variable AE, l'aire y du carré inscrit est représentée par l'expression



$$\overline{EH}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{AH}^2 = x^2 + (a - x)^2,$$

que nous avons mise sous la forme

$$y = \frac{a^2}{2} + 2\left(\frac{a}{2} - x\right)^2.$$

Faisons varier x de o à a; quand $x = 0$, le carré inscrit coïncide avec le carré donné ABCD, l'aire est égale à a^2; x croissant de o à $\frac{a}{2}$, l'aire du carré inscrit diminue de a^2 à $\frac{a^2}{2}$; x continuant à croître de $\frac{a}{2}$ à a, l'aire croît de $\frac{a^2}{2}$ à a^2; enfin, quand x devient égal à a, le carré inscrit coïncide de nouveau avec le carré donné. Ainsi, l'aire du carré inscrit diminue d'abord de a^2 à $\frac{a^2}{2}$, pour augmenter ensuite de $\frac{a^2}{2}$ à a^2; elle passe donc par une valeur minimum $\frac{a^2}{2}$, et l'on obtient ce carré minimum en joignant les milieux des côtés du carré donné.

Si l'on prolonge indéfiniment les côtés du carré donné,

toute restriction disparaîtra, et l'on pourra donner à x des valeurs positives plus grandes que a et aussi des valeurs négatives (le carré inscrit E'F'G'H' correspond à une valeur AE' plus grande que a). De cette manière le carré inscrit augmente indéfiniment.

A cette même question se rattache encore l'*étude de la variation de la diagonale d'un rectangle dont le périmètre est constant*. Car si l'on appelle $2a$ le périmètre donné, x la base, $a-x$ la hauteur, la diagonale y sera

$$y = \sqrt{x^2 + (a-x)^2}.$$

Quand $x = 0$, le rectangle se réduit à une ligne droite de longueur a et la diagonale est égale à a. Si l'on fait croître x de 0 à $\frac{a}{2}$, la diagonale diminue de a à $\frac{a}{\sqrt{2}}$; x continuant à croître de $\frac{a}{2}$ à a, la diagonale augmente de $\frac{a}{\sqrt{2}}$ à a; à la fin, quand $x = a$, le rectangle se réduit de nouveau à une ligne droite et la diagonale redevient égale à a. Ainsi la diagonale acquiert sa valeur minimum pour $x = \frac{a}{2}$, c'est-à-dire quand le rectangle est un carré.

Les deux côtés du rectangle ayant des valeurs essentiellement positives, on ne peut pas faire croître x au delà de a, ni lui donner des valeurs négatives; la diagonale a donc sa plus grande valeur a pour $x = 0$ ou $x = a$, c'est-à-dire quand le rectangle se réduit à une ligne droite.

168. *Deuxième méthode.* Proposons-nous d'abord la question suivante : *Partager le nombre* a *en deux parties telles que la somme de leurs carrés soit égale à* m. En appelant x et y ces deux parties, on a les deux équations

$$x + y = a,$$
$$x^2 + y^2 = m.$$

Nous connaissons déjà la somme des deux inconnues ; si nous pouvions trouver leur produit, nous obtiendrions ces deux inconnues par une même équation du second degré. Or ceci est facile. En élevant au carré les deux membres de la première équation, on a

$$x^2+2xy+y^2=a^2;$$

si l'on en retranche la seconde, on trouve

$$2xy=a^2-m,$$

d'où

$$xy=\frac{a^2-m}{2}.$$

Ainsi les inconnues x et y sont les deux racines de l'équation du second degré

$$u^2-au+\frac{a^2-m}{2}=0;$$

elles sont données par la formule

$$u=\frac{a}{2}\pm\sqrt{\frac{a^2}{4}-\frac{a^2-m}{2}}=\frac{a\pm\sqrt{2m-a^2}}{2};$$

l'une des racines est la valeur de x, l'autre celle de y.

Pour que la question soit possible, il faut que la quantité placée sous le radical soit positive, c'est-à-dire que la valeur de m soit plus grande que $\frac{a^2}{2}$. D'autre part, on peut donner à m une valeur quelconque plus grande que $\frac{a^2}{2}$; car à une telle valeur correspondent des valeurs réelles de x et de y. Ainsi la quantité m prend toutes les valeurs plus grandes que $\frac{a^2}{2}$ et n'en prend aucune plus petite ; sa valeur la plus petite, ou son minimum, est $\frac{a^2}{2}$. Lorsque $m=\frac{a^2}{2}$, les deux racines sont égales ; la somme des carrés acquiert

donc sa valeur minimum, quand le nombre a est partagé en deux parties égales.

169. Question III. Les questions que nous avons traitées jusqu'à présent rentrent dans la question générale suivante : ***étudier la variation du trinôme du second degré*** $ax^2 + bx + c$.

Nous avons vu (157) que le trinôme du second degré, dont nous désignons la valeur par y, peut être mis sous la forme

$$y = a\left[\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right)\right].$$

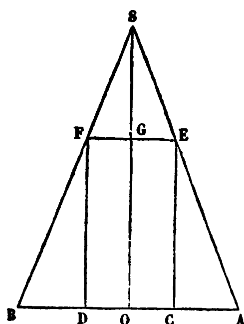
Si, pour simplifier, on représente par A la quantité constante $a\left(q - \frac{p^2}{4}\right)$, et que l'on pose $x = -\frac{p}{2} + z$, on a

$$y = A + az^2.$$

Le binôme, mis sous cette forme, se compose de deux parties, l'une A constante, l'autre az^2 variable et de même signe que a. Lorsque le coefficient a est positif, la valeur de y reste constamment supérieure à la quantité A ; elle acquiert sa plus petite valeur A, ou son minimum, quand $z = 0$ ou $x = -\frac{p}{2}$. Si l'on fait croître z de $-\infty$ à 0 et ensuite de 0 à $+\infty$, la valeur de y décroît de $+\infty$ à A, pour croître ensuite de A à $+\infty$.

Lorsque le coefficient a est négatif, la valeur de y reste constamment inférieure à A ; elle acquiert sa plus grande valeur A, ou son maximum, quand $z = 0$ ou $z = -\frac{p}{2}$. Si l'on fait croître z de $-\infty$ à 0 et ensuite de 0 à $+\infty$, la valeur de y croît de $-\infty$ à A, pour décroître ensuite de A à $-\infty$.

170. QUESTION IV. ***Étudier la variation de la surface totale du cylindre inscrit dans un cône donné.***



Désignons par r le rayon OA de la base du cône, et par h sa hauteur SO ; appelons x le rayon OC de la base du cylindre inscrit, y la hauteur OG. Les triangles semblables ECA, SOA donnent la proportion

$$\frac{y}{h}=\frac{r-x}{r}; \quad \text{d'où} \quad (1) \quad y=\frac{h(r-x)}{r}.$$

La surface totale S du cylindre a pour expression

$$S=2\pi x^2+2\pi xy,$$

et, en remplaçant y par sa valeur

$$(2) \qquad S=2\pi x\left[h+\frac{r-h}{r}x\right].$$

Il y a plusieurs cas à considérer, suivant que le cône donné a une forme plus ou moins allongée. 1° Supposons d'abord la hauteur h du cône moindre que le rayon de la base, c'est-à-dire le cône très-aplati. La quantité $\frac{r-h}{r}$ étant positive, on voit que la surface augmente à mesure que x augmente ; si donc on fait croître x de o à r, la surface ira constamment en augmentant de o à $2\pi r^2$. Au commencement, quand $x=0$, le cylindre se réduit à la ligne droite OS et la surface est nulle ; à la fin, quand $x=r$, la hauteur étant nulle, le cylindre coïncide avec la base du cône et la surface devient égale à $2\pi r^2$. Entre ces deux limites, la surface va continuellement en augmentant, sans alternative de décroissance.

2° Supposons maintenant $h > r$. l'expression de la surface deviendra

$$S = 2\pi x \left[h - \frac{h-r}{r} x \right],$$

ou

$$(3) \qquad S = 2\pi \frac{h-r}{r} \times x \left[\frac{hr}{h-r} - x \right].$$

Négligeant le facteur constant positif $2\pi \frac{h-r}{r}$, nous pouvons nous borner à considérer le produit

$$(4) \qquad x \left[\frac{hr}{h-r} - x \right]$$

des deux facteurs variables. La somme de ces deux facteurs est constante; mais il ne faut pas en conclure immédiatement que le produit acquiert sa valeur maximum quand les deux facteurs sont égaux entre eux; il faut pour cela que ces deux facteurs puissent effectivement devenir égaux entre eux, ce qui n'a pas toujours lieu, comme nous allons le voir. Par une transformation que nous avons déjà faite plusieurs fois, mettons le produit sous la forme

$$\frac{h^2 r^2}{4(h-r)^2} - \left(\frac{hr}{2(h-r)} - x \right)^2.$$

Le rayon x de la base du cylindre n'est susceptible de varier que de 0 à r. Si l'on a

$$\frac{hr}{2(h-r)} > r,$$

c'est-à-dire $h < 2r$, quand x croît de 0 à r, la quantité

$$\frac{hr}{2(h-r)} - x$$

reste positive et diminue sans devenir égale à zéro; la surface du cylindre va en augmentant continuellement depuis

le commencement jusqu'à la fin, comme précédemment. Dans ce cas, les deux facteurs du produit ne deviennent pas égaux entre eux, ce qui exigerait que l'on eût $x = \frac{hr}{2(h-r)}$; la surface arrive à sa plus grande valeur quand $x = r$, c'est-à-dire quand les facteurs diffèrent le moins possible l'un de l'autre.

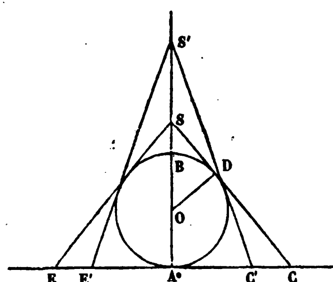
Supposons maintenant $\frac{hr}{2(h-r)} < r$, ou $h > 2r$; x variant de o à $\frac{hr}{2(h-r)}$, la surface augmente de o à $\frac{\pi h^2 r}{2(h-r)}$; x continuant à croître de $\frac{hr}{2(h-r)}$ à r, la surface diminue de cette valeur $\frac{\pi h^2 r}{2(h-r)}$ jusqu'à la valeur extrême $2\pi r^2$. Ainsi la surface passe par un maximum pour $x = \frac{hr}{2(h-r)}$; dans ce cas, les deux facteurs du produit dont nous avons parlé deviennent égaux entre eux.

En résumé, si l'on fait croître x de o à r : 1° quand $h < 2r$, la surface du cylindre inscrit va en augmentant continuellement depuis le commencement jusqu'à la fin; 2° quand $h > 2r$, la surface augmente de zéro jusqu'à une certaine valeur maximum, puis diminue de ce maximum jusqu'à $2\pi r^2$.

171. Question V. *Étudier la variation du volume d'un cône circonscrit à une sphère donnée.*

Soit AB un diamètre fixe de la sphère; menons par le point A un plan tangent à la sphère et sur le prolongement du diamètre AB prenons un point quelconque S pour sommet du cône circonscrit. Si le sommet S se rapproche du point B, le cône, s'évasant de plus en plus, augmente in-

définiment; si, au contraire, le sommet S s'éloigne du point B, le cône, s'allongeant de plus en plus, et ayant toujours une base plus grande qu'un grand cercle de la sphère, augmente aussi indéfiniment. Ainsi, lorsqu'on fait glisser le sommet S sur le prolongement du diamètre à partir du point B, on voit que le cône circonscrit, d'abord infiniment grand, commence par diminuer pour augmenter ensuite et redevenir indéfiniment grand, il passe donc par une valeur plus petite que toutes les autres, c'est-à-dire par un minimum.



Le volume du cône a pour mesure

$$\tfrac{1}{3}\pi\overline{AC}^2 \times SA.$$

Appelons r le rayon de la sphère et x la distance BS. On a

$$SA = 2r + x.$$

Les triangles semblables SAC, SOD donnent la proportion

$$\frac{AC}{OD} = \frac{SA}{SD};$$

d'où l'on déduit, en remarquant que la tangente SD, moyenne proportionnelle entre SA et SB, égale $\sqrt{x(2r+x)}$,

$$AC = \frac{r(2r+x)}{\sqrt{x(2r+x)}}, \quad \overline{AC}^2 = \frac{r^2(2r+x)}{x}.$$

Si l'on remplace les quantités AC et SA par leurs valeurs, le volume du cône aura pour expression

$$\tfrac{1}{3}\pi r^2 \frac{(2r+x)^2}{x}.$$

Proposons-nous d'abord cette question : circonscrire à la

sphère un cône de volume donné. Si, pour simplifier, nous représentons le volume donné par $\frac{4}{3}\pi r^2 m$, nous aurons l'équation

$$\frac{(2r+x)^2}{x} = 4m,$$

qui, mise sous forme entière, devient

$$(1) \qquad x^2 - 4(m-r)x + 4r^2 = 0.$$

On en déduit

$$x = 2(m-r) \pm 2\sqrt{(m-r)^2 - r^2},$$

et, en simplifiant la quantité placée sous le radical,

$$x = 2(m-r) \pm 2\sqrt{m(m-2r)}.$$

Pour que x soit réelle, il est nécessaire et il suffit que la quantité positive m soit plus grande que $2r$; donc m a un minimum $2r$, et quand on donne à m cette valeur on trouve $x = 2r$. Ainsi le plus petit cône S'C'E' circonscrit à la sphère a une hauteur S'A double du diamètre de la sphère; le volume de ce cône minimum est $\frac{8}{3}\pi r^3$; c'est le double du volume de la sphère.

A toute valeur de m plus grande que $2r$ correspondent deux valeurs de x réelles et positives; il existe donc deux cônes ayant un même volume quelconque plus grand que le minimum; la hauteur de l'un est plus grande que la hauteur S'A du cône minimum, celle de l'autre est plus petite. En effet, si dans le premier membre de l'équation (1) on remplace x par $2r$, on a un résultat négatif $8r(2r-m)$; donc l'une des racines est plus petite, l'autre plus grande que $2r$.

Ce qui précède montre bien que, lorsque x croît de o

à $2r$, le volume du cône diminue de l'infini à sa valeur minimum $\frac{8}{3}\pi r^3$, et que, lorsque x continue à croître au delà de $2r$, le volume augmente ensuite indéfiniment.

172. Question VI. *Étudier la variation de la fraction*

$$\frac{2x^2+6}{x^2-6x+11},$$

dans laquelle x *désigne une variable réelle arbitraire.*

Proposons-nous d'abord de trouver les valeurs de x qui rendent cette fraction égale à une quantité y. Nous aurons l'équation

$$\frac{2x^2+6}{x^2-6x+11}=y;$$

$$(y-2)x^2-6yx+11y-6=0,$$

d'où l'on déduit

$$x=\frac{3y\pm\sqrt{9y^2-(y-2)(11y-6)}}{y-2},$$

et, en simplifiant,

$$x=\frac{3y\pm\sqrt{-2y^2+28y-12}}{y-2}.$$

Pour que x soit réelle, il est nécessaire et il suffit que la quantité placée sous le radical soit positive. Ainsi la quantité y prendra toutes les valeurs qui rendent positif le trinôme

$$-2y^2+28y-12,$$

et n'en prendra pas d'autres. Le trinôme, ayant ses racines réelles, se décompose en facteurs du premier degré et s'écrit

$$-2(y-y')(y-y''),$$

ou

$$2(y-y')(y''-y),$$

Nous appelons y' la plus petite racine, y'' la plus grande. Le trinôme est positif pour toutes les valeurs de y comprises entre y' et y'', et il est négatif pour toutes les autres valeurs. Ainsi, quand la variable x parcourt toute l'échelle des grandeurs, la fraction proposée y varie entre y' et y'', sans jamais sortir de ces limites. La limite inférieure y' est un minimum, la limite supérieure y'' un maximum.

Comme $\sqrt{43} = 6,557$ à 0,001 près, le minimum de la fraction est $y' = 0,443$, le maximum $y'' = 13,557$. La valeur de x qui rend la fraction minimum est $x' = \frac{3y'}{y'-2} = -0,854$; celle qui la rend maximum est $x'' = \frac{3y''}{y''-2} = 3,519$. A toute valeur de y comprise entre y' et y'' correspondent deux valeurs différentes de x.

Nous pouvons maintenant nous rendre compte de la variation de la fraction proposée, quand x varie d'une manière continue de $-\infty$ à $+\infty$. Examinons d'abord ce que devient cette fraction, quand on donne à x une valeur numérique très-grande, positive ou négative. Pour cela, nous diviserons par x^2 le numérateur et le dénominateur, ce qui donne

$$y = \frac{2 + \frac{6}{x^2}}{1 - \frac{6}{x} + \frac{11}{x^2}};$$

quand x est très-grand numériquement, les quantités $\frac{6}{x^2}, \frac{6}{x}, \frac{11}{x^2}$ sont très-petites, et la fraction diffère très-peu de la valeur 2; ceci nous apprend que la fraction tend vers la valeur 2 quand x augmente indéfiniment en valeur absolue. Si donc on fait croître x d'une manière continue de $-\infty$ à $-0,854$, la fraction proposée ira en diminuant

de la valeur 2 à la valeur minimum 0,443; x croissant ensuite de $-0,854$ à 3,519, la fraction ira en croissant du minimum 0,443 au maximum 13,557; x dépassant enfin 3,519 et croissant indéfiniment, la fraction ira en diminuant du maximum 13,557 à la valeur 2. Il est à remarquer que la fraction passe deux fois par chaque valeur intermédiaire entre le minimum et le maximum; il faut en excepter toutefois la valeur 2; la fraction ne passe pas précisément deux fois par la valeur 2; car cette valeur doit être considérée comme la valeur limite vers laquelle tend la fraction, quand x s'éloigne vers l'infini positif ou vers l'infini négatif.

173. QUESTION VII. ***Étudier la variation de la fraction***

$$\frac{x^2+5}{6x-7}.$$

Si nous cherchons les valeurs de x qui rendent la fraction égale à y, nous avons l'équation

$$\frac{x^2+5}{6x-7}=y,$$

$$x^2-6yx+7y+5=0,$$

d'où

$$x=3y\pm\sqrt{9y^2-7y-5}.$$

La fraction y prendra toutes les valeurs qui rendent positif le trinôme

$$9y^2-7y-5.$$

Ce trinôme ayant ses racines réelles ($y'=-0,452$, $y''=1,230$) se décompose en facteurs réels et se met sous la forme

$$9(y-y')(y-y''),$$

Il est négatif pour les valeurs de y comprises entre y' et y''; mais il est positif pour toutes les valeurs de y plus grandes

que y'' ou plus petites que y'. Ainsi la fraction y admet deux séries de valeurs : l'une, commençant à y'' et s'élevant à $+\infty$; l'autre commençant à y' et descendant vers $-\infty$. La valeur y'' est le minimum de la première série, elle est donnée par $x = 3y'' = 3{,}690$; la valeur y' est le maximum de la seconde série, elle est donnée par $x = 3y' = -1{,}336$.

Remarquons que les mots maximum et minimum n'ont pas ici un sens absolu, mais seulement un sens relatif. La valeur y'' est la plus petite de toutes celles de la première série ; mais elle est plus grande que les valeurs de la seconde série. De même, la valeur y' est la plus grande de toutes celles de la seconde série ; c'est un maximum relativement à cette seconde série.

Ainsi, la fraction proposée varie de y'' à $+\infty$ et de y' à $-\infty$; elle parcourt toute l'échelle des grandeurs, sauf la portion comprise entre y' et y''. Il faut remarquer que la fraction saute brusquement de $-$ à $+\infty$, quand x passe par la valeur $\frac{7}{6}$. En effet, quand x est un peu plus petit que $\frac{7}{6}$, la fraction est négative et très-grande en valeur absolue; dès que x dépasse un peu $\frac{7}{6}$, la fraction devient positive et très-grande.

Si l'on divise le numérateur et le dénominateur par x, ce qui met la fraction sous la forme

$$\frac{x+\frac{5}{x}}{6-\frac{7}{x}},$$

on voit que, pour de très-grandes valeurs de x, le numérateur différant très-peu de x, et le dénominateur de 6, la

fraction est à peu près égale à $\frac{x}{6}$. Elle a des valeurs très-grandes et de même signe que x.

Il résulte de tout ce qui précède que si l'on fait croître x de $-\infty$ à $-1,356$, la fraction va en croissant de $-\infty$ au maximum $-0,452$; x continuant à croître de $-1,356$ à $\frac{7}{6}$, la fraction va en décroissant de $-0,452$ à $-\infty$. Quand x passe par la valeur $\frac{7}{6}$, la fraction saute brusquement de $-\infty$ à $+\infty$; x croissant ensuite de $\frac{7}{6}$ à $3,690$, la fraction décroît de $+\infty$ au minimum $1,230$; x dépassant $3,690$ et croissant jusqu'à $+\infty$, la fraction va en croissant de $1,230$ à $+\infty$.

174. QUESTION VIII. *Étudier la variation de la fraction*

$$\frac{x^2-5}{2x-4}.$$

En égalant cette fraction à y et résolvant l'équation, on trouve

$$x=y\pm\sqrt{y^2-4y+5}.$$

Le trinôme placé sous le radical ayant ses racines imaginaires, peut se mettre sous la forme d'une somme de deux carrés

$$(y-2)^2+1;$$

il reste constamment positif, quelle que soit la valeur de y. Ainsi la quantité y peut recevoir toutes les valeurs possibles, et la fraction proposée parcourt toute l'échelle des grandeurs de $-\infty$ à $+\infty$.

La fraction saute brusquement de $+\infty$ à $-\infty$, quand x passe par la valeur 2. D'autre part, si l'on divise le numé-

rateur et le dénominateur par x, elle s'écrit

$$\frac{x - \frac{5}{x}}{2 - \frac{4}{x}},$$

et devient à peu près égale à $\frac{x}{2}$ pour de très-grandes valeurs de x positives ou négatives. On conclut de là que, quand x varie de $-\infty$ à $+2$, la fraction va en augmentant de $-\infty$ à $+\infty$; x passant par la valeur 2, la fraction saute brusquement de $+\infty$ à $-\infty$; x variant ensuite de 2 à $+\infty$, la fraction croît de nouveau de $-\infty$ à $+\infty$, parcourant une seconde fois toute l'échelle des grandeurs.

D'après ce que nous avons dit, la fraction parcourt deux fois toute l'échelle des grandeurs; dans chacun de ces mouvements, elle va en augmentant continuellement sans éprouver d'alternative de décroissance; autrement elle passerait plus de deux fois par la même valeur; ce qui ne peut pas être, puisqu'à une même valeur de m ne correspondent que deux valeurs de x.

175. Question IX. **Les trois dernières questions rentrent dans l'étude de la variation de la fraction rationnelle**

$$(1) \qquad \frac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'}.$$

Les exemples précédents montrent les circonstances principales qui peuvent se présenter; cependant il est bon de traiter la question d'une manière générale.

Les coefficients a, b, c, a', b', c' étant supposés réels, à toute valeur réelle de la variable x correspond une valeur réelle de la fraction. Cherchons les valeurs de x qui correspondent à une valeur donnée y de de la fraction ; nous avons

à résoudre l'équation du second degré

$$\frac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'}=y,$$

ou

$$(2)\quad (a'y-a)x^2+(b'y-b)x+(c'y-c)=0;$$

d'où l'on déduit

$$(3)\quad x=\frac{-(b'y-b)\pm\sqrt{(b'y-b)^2-4(a'y-a)(c'y-c)}}{2(a'y-a)}.$$

La quantité placée sous le radical est un polynôme du second degré en y, que nous représenterons par

$$(4)\qquad Ay^2+By+C,$$

en posant, pour abréger,

$$A=b'^2-4a'c',\quad C=b^2-4ac,\quad B=4(ac'+ca')-2bb'.$$

La variable x étant réelle, on pourra attribuer à y toutes les valeurs qui rendent le trinôme (4) supérieur ou égal à zéro, et aucune autre. Il y a plusieurs cas à considérer :

1° Supposons que le coefficient A ait une valeur négative. La quantité B^2-4AC ne pourra être négative ; car, si cela avait lieu, le trinôme (4), ayant ses racines imaginaires, conserverait le signe de son premier coefficient A (n° 157), et par conséquent serait négatif pour toutes les valeurs réelles de y : à aucune valeur réelle de y ne correspondrait une valeur réelle de x, ce qui est impossible, puisqu'à toute valeur réelle de x correspond une valeur réelle de y. La quantité B^2-4AC sera donc supérieure ou égale à zéro. Si cette quantité est positive, le trinôme (4), ayant ses deux racines y' et y'' réelles et inégales, sera positif pour toutes les valeurs de y comprises entre y' et y'', et négatif pour toutes les autres valeurs de y. Ainsi, dans ce cas, la fraction y variera de y' à y''; la plus petite racine y' sera un minimum, la plus grande y'' un maximum.

Il est facile de le reconnaître *à priori* : la quantité A ou $b'^2 - 4a'c'$ étant négative, le trinôme $a'x^2 + b'x + c'$ ne s'annule pas, et par conséquent la fraction conserve une valeur finie pour toutes les valeurs finies de x. Comme elle diffère très-peu de la quantité finie $\frac{a}{a'}$ pour les valeurs de x très-grandes numériquement, on en conclut que cette fraction reste comprise entre deux limites.

Si la quantité $B^2 - 4AC$ était nulle, le trinôme (4), ayant ses racines égales, se mettrait sous la forme $A(y - y')^2$; il serait négatif pour toutes les valeurs de y, excepté pour $y = y'$; on ne pourrait attribuer que cette seule valeur à la fraction, qui alors serait constante. Il est facile de voir que, dans ce cas, les coefficients des termes correspondants des deux trinômes qui composent la fraction sont proportionnels. En effet, y ayant une valeur constante, quelle que soit la valeur de x, l'équation du second degré (2), dont les coefficients ont des valeurs constantes, est vérifiée par une infinité de valeurs de x ; il faut donc que les trois coefficients soient nuls séparément, c'est-à-dire que l'on ait

$$a'y - a = 0, \quad b'y - b = 0, \quad c'y - c = 0,$$

et par suite

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}.$$

Réciproquement, quand les coefficients des trinômes $ax^2 + bx + c$ $a'x^2 + b'x + c'$ sont proportionnels, la fraction a une valeur constante ; car, si l'on a $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = k$, k étant la valeur de ces rapports égaux, on en déduit $a = ka'$, $b = kb'$, $c = kc'$, et la fraction proposée devient

$$\frac{k(a'x^2 + b'x + c')}{a'x^2 + b'x + c'}.$$

On peut supprimer le facteur commun $a'x^2+b'x+c'$; alors la fraction ne contient plus la variable x et se réduit à une constante k.

2° Supposons maintenant que le coefficient A ait une valeur positive. Si la quantité B^2-4AC est positive, le trinôme (4), ayant ses racines y' et y'' réelles et inégales, est positif pour toutes les valeurs de y inférieures à la plus petite racine y', ou supérieures à la plus grande y'', et négatif pour toutes les valeurs comprises entre les racines. La fraction y prendra donc deux séries de valeurs, allant, l'une de y' à $-\infty$, l'autre de y'' à $+\infty$; y' est le maximum de la première série, y'' le minimum de la seconde série. Le dénominateur $a'x^2+b'x+c'$ a ses racines réelles et y devient infinie quand x passe par l'une de ces racines.

Si la quantité B^2-4AC est inférieure ou égale à zéro, le trinôme conserve une valeur positive pour toutes les valeurs de y. Ainsi, dans ce cas, la fraction parcourt toute l'échelle des grandeurs de $-\infty$ à $+\infty$.

3° Considérons enfin le cas où le coefficient A est nul. La quantité placée sous le radical se réduit à un polynôme du premier degré $By+C$, que l'on peut mettre sous la forme $B(y-y')$. Si le coefficient B est positif, la fraction y prend toutes les valeurs supérieures à la valeur y', qui est un minimum. Si le coefficient B est négatif, y prend au contraire toutes les valeurs inférienres à la valeur y', qui est un maximum.

Le coefficient B pourrait être nul en même temps que A; le coefficient C étant supérieur ou égal à zéro, y prend toutes les valeurs possibles. Dans ce cas, l'équation (3) devient

$$x=\frac{-(b'y-b)\pm\sqrt{C}}{2(a'y-a)};$$

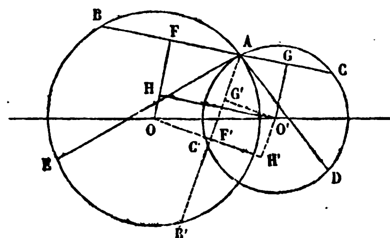
d'où l'on déduit

$$y = \frac{2ax + b \pm \sqrt{C}}{2a'x + b'},$$

et l'on voit que la fraction proposée se réduit au premier degré ; cette réduction a lieu par la suppression d'un facteur commun du premier degré.

176. QUESTION X. *Étant donnés deux cercles qui se coupent au point* A ; *par ce point on mène une sécante quelconque* BC ; *étudier la variation du produit des deux portions* AB *et* AC *de cette sécante.*

Étudions d'abord sur la figure la variation du produit AB × AC. Faisons tourner la sécante autour du point A de droite à gauche ; si nous partons de la position AD où elle est tangente au grand cercle, le segment AB est nul ainsi que le produit ; quand nous arrivons à la position AE où elle est tangente au petit cercle, le segment AC s'annulant, le produit redevient nul ; dans l'intervalle le produit a donc passé par un maximum. Si nous continuons le mouvement dans le même sens pour aller de la position AE à la position AD, le produit, partant de zéro pour revenir à zéro, passe par un second maximum.



Supposons que la sécante occupe la position BC ; des centres O et O', abaissons sur cette sécante les perpendiculaires OF, O'G, et du centre O', menons une parallèle O'H à la sécante. Appelons a et b les rayons OA, O'A des deux cercles, d la distance OO' des centres, x et y les moitiés AF, AG des deux segments de la sécante, $4m$ le produit de ces

deux segments, on a la première équation

$$(1) \qquad xy = m.$$

Le triangle rectangle OO'H donne

$$d^2 = \overline{O'H}^2 + \overline{OH}^2 = (x+y)^2 + (OF - O'G)^2;$$

si l'on développe les carrés, et si l'on observe que

$$\overline{OF}^2 = a^2 - x^2, \qquad \overline{O'G}^2 = b^2 - y^2,$$

il vient

$$d^2 = a + b^2 + 2m - 2\sqrt{(a^2 - x^2)(b^2 - y^2)},$$

d'où

$$\sqrt{(a^2 - x^2)(b^2 - y^2)} = \frac{a + b^2 - d^2}{2} + m = A + m,$$

en désignant, pour abréger, par A la quantité connue $\frac{a^2 + b^2 - d^2}{2}$. En élevant au carré, et développant, on a

$$a^2b^2 - b^2x^2 - a^2y^2 + x^2y^2 = (A+m)^2,$$

ou

$$(2) \qquad b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 + m^2 - (A+m)^2.$$

Les deux équations (1) et (2) conviennent aussi au cas où la sécante occupe la position AB'; seulement, dans ce cas, le segment AC', étant porté en sens contraire, sera regardé comme négatif, ainsi que le produit m. Dans le triangle rectangle OO'H', le côté O'H' est égal à la différence AF' — AG', ou à la somme algébrique $x + y$; le côté OH' est une somme OF' + O'G', au lieu d'être une différence comme précédemment; le signe placé devant le radical est donc changé, mais l'élévation au carré donne la même équation (2). Puisque, dans cette nouvelle position de la

sécante, le produit m est regardé comme négatif, on voit que le second maximum géométrique correspond à un minimum algébrique. Ainsi le produit m variera entre un minimum négatif et un maximum positif.

Afin de rendre l'équation (2) symétrique par rapport aux deux inconnues, nous poserons

$$bx = x', \quad ay = y',$$

prenant pour inconnues nouvelles x' et y'; les équations (1) et (2) deviennent ainsi

$$(3) \qquad x'y' = abm,$$
$$(4) \qquad x'^2 + y'^2 = a^2b^2 + m^2 - (A + m)^2.$$

On connaît le produit des deux inconnues et la somme de leurs carrés. Si à la seconde équation on ajoute la première multipliée par 2, il vient

$$(x' + y')^2 = (ab + m)^2 - (A + m)^2,$$

d'où

$$x' + y' = \pm\sqrt{(ab - A)(ab + A + 2m)}.$$

De même, si de la seconde équation on retranche la première multipliée par 2, il vient

$$(x' - y')^2 = (ab - m)^2 - (A + m)^2,$$

d'où

$$x' - y' = \pm\sqrt{(ab + A)(ab - A - 2m)}.$$

Si l'on remplace A par sa valeur, les deux expressions précédentes deviennent

$$(5) \quad x' + y' = \pm\frac{1}{2}\sqrt{[d^2 - (a - b)^2][(a + b)^2 - d^2 + 4m]}.$$

$$(6) \quad x' - y' = \pm\frac{1}{2}\sqrt{[(a + b)^2 - d^2][d^2 - (a - b)^2 - 4m]}.$$

Pour que la question soit possible, il est nécessaire et il suffit que les deux radicaux soient réels. Nous remarquons d'abord que, puisque la distance des centres est plus petite que la somme des rayons et plus grande que leur différence, les deux quantités

$$(a+b)^2-d^2, \quad d^2-(a-b)^2$$

sont positives; en représentant, pour abréger, par p et q ces deux quantités positives, on a

$$x'+y'=\pm\frac{1}{2}\sqrt{q(p+4m)},$$

$$x'-y'=\pm\frac{1}{2}\sqrt{p(q-4m)}.$$

Le premier radical est réel, si $4m$ est plus grand que $-p$, le second, si $4m$ est plus petit que q. Donc le produit des deux segments de la sécante varie du minimum $-p$ au maximum $+q$.

Si l'on fait $4m=q$, on a $x'-y'=0$, et par suite $bx=ay$, ou $\frac{x}{y}=\frac{a}{b}$; les deux segments AB et AC étant proportionnels aux rayons, les deux triangles OAB, O'AC sont semblables, les rayons OA, O'C sont parallèles, et par conséquent la sécante passe par le centre de similitude externe des deux cercles. De même, si l'on fait $4m=-p$, on a $x'+y'=0$; la sécante AB' passe par le centre de similitude interne. Ainsi le produit acquiert son premier maximum, quand la sécante passe par le centre de similitude externe; il acquiert son second maximum numérique, quand la sécante passe par le centre de similitude interne.

177. Question XI. *Alvéole des abeilles.* Étant donné un prisme droit ayant pour base un hexagone régulier, prenons

sur le prolongement de l'axe O'O du prisme (*fig.* 1) un point arbitraire S; par ce point et les trois côtés du triangle équilatéral ACE, que l'on obtient en joignant deux à deux les sommets de la base supérieure, menons trois plans; ces plans détachent du prisme hexagonal trois tétraèdres BACG, DCEH, FAEK, et les remplacent par le tétraèdre SACE placé au-dessus du prisme; nous formons ainsi le solide représenté par la figure 2, qui se termine à sa partie supérieure par une sorte d'hexagone gauche, réunion des trois losanges qui aboutissent au sommet S.

Fig. 1.

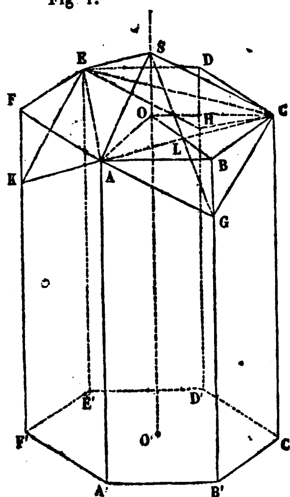
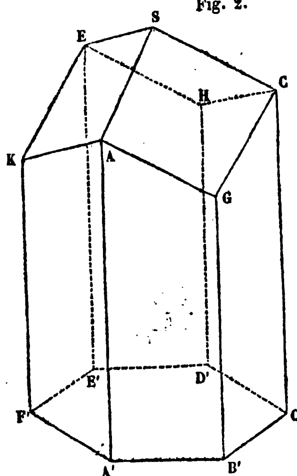


Fig. 2.



Il est aisé de voir que le volume du solide ainsi formé est constant, quelle que soit la position du point S sur le prolongement de l'axe du prisme. En effet, les deux losanges SAGC, OABC (*fig.* 1) ayant une diagonale commune AC, les deux autres diagonales SG et OB passent par le même point L, milieu de AC; les triangles rectangles LBG, LOS, sont égaux, et l'on a BG = OS. Il en résulte que le tétraèdre GABC détaché du prisme, et le tétraèdre ajouté SAOC, sont égaux, comme ayant leurs bases égales ABC, AOC, et aussi leurs hauteurs égales BG et OS. Ainsi la somme

des trois parties détachées du prisme est égale à la pyramide ajoutée SACE.

Considérons maintenant la surface du solide. Appelons a le côté A'B' de l'hexagone régulier, l la longueur de l'arrête AA' du prisme primitif, x la distance arbitraire OS. La surface latérale du solide que nous étudions, se composant de six trapèzes tels que AA'B'G, a pour mesure

$$3(\mathrm{AA}'+\mathrm{GB}')\times \mathrm{A'B'}=3a(2l-x).$$

Les trois losanges qui terminent le solide ont pour mesure

$$\frac{3\mathrm{AC}\times \mathrm{SG}}{2}=3\mathrm{AC}\times \mathrm{SL}=3a\sqrt{3}\sqrt{x^2+\frac{a^2}{4}}.$$

Ainsi la surface totale du solide, abstraction faite de la base inférieure, a pour expression

$$3a(2l-x)+3a\sqrt{3}\sqrt{x^2+\frac{a^2}{4}}.$$

Cherchons la valeur de x pour laquelle cette surface est égale à une surface donnée que, pour simplifier, nous représenterons par $3am$; nous avons l'équation

$$2l-x+\sqrt{3x^2+\frac{3a^2}{4}}=m,$$

ou

$$\sqrt{3x^2+\frac{3a^2}{4}}=m-2l+x.$$

A l'inspection de cette équation, on voit que le premier membre étant plus grand que x, la quantité $m-2l$ est positive; si on la représente par m', l'équation devient

$$(1)\qquad \sqrt{3x^2+\frac{3a^2}{4}}=m'+x.$$

En élevant au carré, on obtient l'équation du second degré

$$(2) \qquad 2x^2 - 2m'x + \frac{3a^2}{4} - m'^2 = 0.$$

Les racines seront réelles si la quantité positive m' satisfait à la condition

$$m'^2 > \frac{a^2}{2},$$

ou plus simplement

$$m' > \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Tant que l'on a $m' < \frac{a\sqrt{3}}{2}$, le produit étant positif, les deux racines de l'équation (2) sont positives et conviennent à l'équation (1); on a deux solutions du problème. Quand on a $m' = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, l'une des racines est nulle, l'autre positive; on a encore deux solutions, l'une d'elles est le cylindre non modifié. Enfin, quand on a $m' > \frac{a\sqrt{3}}{2}$, l'une des racines est positive, l'autre négative : la racine positive convient évidemment à l'équation (1); la racine négative y convient aussi; car elle est comprise entre les deux quantités o et $-m'$ qui, mises à la place de x dans le premier membre de l'équation (2), donnent des résultats de signes contraires. Si l'on attribue à m' sa valeur minimum $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ on a $x = \frac{a\sqrt{2}}{4}$.

On conclut de là que, si l'on fait varier x de $-l$ à $+\frac{a\sqrt{2}}{4}$, la surface va en diminuant continuellement, et qu'elle augmente ensuite, quand x croît de $+\frac{a\sqrt{2}}{4}$ à $+l$; elle passe donc par un minimum pour $x = \frac{a\sqrt{2}}{4}$.

Les abeilles construisent leurs cellules sur ce plan. L'entrée de l'alvéole est un hexagone régulier A'B'C'D'E'F' (fig. 2); le fond est formé de la réunion de trois facettes planes inclinées de manière que la surface soit minimum. Il y a ainsi économie de cire. Les alvéoles sont placées les unes à côté des autres en doubles rayons, les ouvertures tournées en dehors, et les fonds se touchant exactement de manière qu'il n'y ait pas d'intervalle vide entre elles et que chaque cloison serve à deux cellules voisines.

178. QUESTION XII. *Partager un nombre donné en plusieurs parties de manière que le produit de ces parties soit maximum.*

Pour fixer les idées, supposons que l'on partage le nombre donné positif a en trois parties positives x, y, z, dont chacune peut varier de o à a. Le produit, devenant nul quand l'un des facteurs est nul et conservant une valeur finie positive dans cette étendue, admet évidemment un maximum; il est aisé de reconnaître que ce maximum a lieu quand les trois facteurs sont égaux entre eux, c'est-à-dire quand $x = y = z = \frac{a}{3}$. En effet, supposons que deux des facteurs, par exemple x et y, diffèrent; fixons le troisième facteur z, et faisons varier les deux premiers facteurs x et y, dont la somme $a - z$ est alors constante, de manière à les rendre égaux entre eux; il est clair que nous augmenterons le produit xy et par suite le produit xyz; ainsi, tant que deux facteurs diffèrent, on peut les modifier de manière à augmenter la valeur du produit; le produit n'arrive donc à sa valeur maximum que lorsque les trois facteurs sont égaux entre eux.

Applications : 1° L'aire d'un triangle est exprimée par la

formule

$$\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

dans laquelle a, b, c désignent les trois côtés et $2p$ le périmètre. Si l'on fait varier les côtés de manière que le périmètre reste constant, la somme des trois facteurs variables $p-a$, $p-b$, $p-c$ restant constamment égale à p, leur produit sera maximum quand ces trois facteurs seront égaux entre eux, c'est-à-dire quand $a=b=c$. Ainsi, *de tous les triangles ayant même périmètre, le plus grand est le triangle équilatéral.*

2° Étant données n quantités $a, b, c, \ldots$, toute quantité grande que la plus petite et plus petite que la plus grande des quantités données est dite une *moyenne* entre ces quantités. Il est clair que la quantité

$$\frac{a+b+c+\ldots\ldots}{n}$$

est une moyenne entre les quantités données; on l'appelle *moyenne arithmétique*. Supposons que les quantités données soient toutes positives, l'expression

$$\sqrt[n]{abc\ldots\ldots}$$

sera aussi une moyenne entre ces quantités; on lui a donné le nom de *moyenne géométrique*. Il est aisé de démontrer que la moyenne arithmétique est plus grande que la moyenne géométrique. Nous voulons faire voir que l'on a

$$\frac{a+b+c+\ldots\ldots}{n} > \sqrt[n]{abc\ldots\ldots}$$

ou, en élevant les deux membres à la puissance n,

$$\left(\frac{a+b+c+\ldots\ldots}{n}\right)^n > abc\ldots\ldots$$

Le premier membre est le produit de n facteurs égaux à $\frac{a+b+c+\ldots}{n}$; la somme de ces facteurs est

$$a+b+c+\ldots\ldots;$$

le second membre est un produit de n facteurs inégaux dont la somme est aussi $a+b+c+\ldots$; la somme des facteurs étant la même de part et d'autre, le premier produit, dont tous les facteurs sont égaux, est plus grand que le second.

179. Remarque. Dans la question précédente, nous avons supposé que les facteurs variables et positifs ne sont assujettis qu'à la condition

$$x+y+z+\ldots\ldots=a$$

d'avoir une somme constante; chacun des facteurs varie de o à a, et on peut les prendre tous arbitrairement, excepté un. Dans ce cas, nous avons vu que le produit est maximum, quand tous les facteurs sont égaux. La même propriété subsiste quand, outre la condition d'avoir une somme constante, les facteurs variables sont assujettis à vérifier d'autres relations, pourvu, toutefois, que les nouvelles relations permettent de rendre tous les facteurs égaux entre eux. Pour fixer les idées, bornons-nous au cas de trois facteurs, et supposons que ces trois facteurs positifs soient assujettis à vérifier les deux conditions

$$(1) \qquad x+y+z=a,$$

$$(2) \qquad x+2y+3z=b.$$

Imaginons d'abord que l'on fasse abstraction de la relation (2) et que l'on donne aux trois facteurs x, y, z tous les systèmes de valeurs positives qui vérifient la relation (1);

la plus grande valeur du produit xyz sera la valeur $\frac{a^3}{27}$, qui a lieu quand on fait $x = y = z = \frac{3}{a}$. Si, maintenant, on tient compte de la relation (2), il faudra, parmi les systèmes de valeurs de x, y, z qui vérifient la relation (1), prendre seulement ceux qui vérifient en même temps la relation (2) ; le produit xyz ne passera plus par toute la série des valeurs qu'il avait précédemment, mais seulement par une partie d'entre elles ; il est évident que le maximum de la série partielle ne pourra, dans aucun cas, surpasser le maximum de la série totale considérée précédemment ; le plus souvent même il sera moindre. Si les trois facteurs peuvent devenir égaux entre eux, ce qui a lieu quand $b=2a$, le produit acquerra la valeur maximum $\frac{a^3}{27}$; mais si b diffère de $2a$, les trois facteurs ne pouvant être rendus égaux entre eux, le produit n'atteindra pas la valeur $\frac{a^3}{27}$; son maximum sera plus petit que $\frac{a^3}{27}$; dans ce cas, pour déterminer le maximum, il faut recourir à une autre méthode qui sera exposée dans le Cours de mathématiques spéciales.

180. QUESTION XIII. *Partager le nombre* a *en deux parties* x *et* y *telles que le produit* $x^m y^n$ *soit maximum.*

Nous pouvons écrire ce produit sous la forme

$$x^m y^n = m^m n^n \frac{x^m}{m^m} \times \frac{y^n}{n^n}.$$

Faisons abstraction du facteur constant $m^m n^n$, et considérons seulement l'expression variable

$$\frac{x^m}{m^m} \times \frac{y^n}{n^n},$$

que l'on peut écrire ainsi :

$$\frac{x}{m}\cdot\frac{x}{m}\cdots\cdots\times\frac{y}{n}\cdot\frac{y}{n}\cdots\cdots$$

C'est le produit de $m+n$ facteurs, dont m sont égaux à $\frac{x}{m}$, et n égaux à $\frac{y}{n}$; la somme de tous ces facteurs

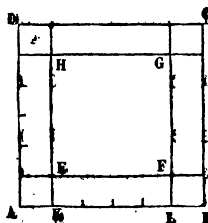
$$m\frac{x}{m}+n\frac{y}{n}$$

est constante, puisque $x+y=a$; d'ailleurs tous ces facteurs peuvent être rendus égaux entre eux; donc le produit acquerra sa valeur maximum, quand tous les facteurs seront égaux entre eux, c'est-à-dire quand on aura

$$\frac{x}{m}=\frac{y}{n}.$$

Ainsi il faut partager le nombre a en deux parties proportionnelles aux deux exposants m et n.

Applications. 1° Étant donnée une feuille de carton carrée ABCD, si, après avoir mené des parallèles aux quatre côtés à la même distance, on enlève les petits carrés dans les angles et qu'on relève les portions rectangulaires telles que EKLF, on forme une boîte à fond carré EFGH. Appelons $2a$ le côté AB de la feuille de carton et x la distance AK à laquelle on trace les parallèles; la boîte a pour base un carré dont le côté EF est $2a-2x$ ou $2(a-x)$; sa hauteur est x; le volume a pour expression



$$4(a-x)^2x.$$

Quand x varie de o à a, le volume, qui est nul pour $x=0$, augmente d'abord, pour diminuer ensuite et redevenir nul; il passe donc par un maximum; la somme des deux facteurs variables $a-x$ et x étant constante, ce maximum

aura lieu quand ces deux facteurs seront proportionnels aux exposants 2 et 1, c'est-à-dire quand on aura

$$\frac{a-x}{2}=\frac{x}{1},$$

d'où

$$x=\frac{a}{3}.$$

Ainsi, pour obtenir la boîte la plus grande, il faut partager le côté AB en six parties égales et mener les parallèles par les premiers points de division.

2° *Quel est le plus grand des cylindres circulaires droits qui ont une surface donnée?* Appelons x le rayon de la base du cylindre et y la hauteur, désignons par $2\pi a^2$ la surface totale et par V le volume; on a

$$(1) \qquad x^2+xy=a^2,$$
$$(2) \qquad V=\pi x^2 y.$$

Si dans l'expression du volume on remplace y par sa valeur

$$(3) \qquad y=\frac{a^2-x^2}{x}$$

tirée de l'équation (1), il vient

$$(4) \qquad V=\pi x(a^2-x^2).$$

L'équation (3) fait voir que x peut varier de 0 à a; le volume, partant de zéro pour revenir à zéro et conservant une valeur finie, passe nécessairement par un maximum. Le volume aura sa plus grande valeur, quand le produit $x(a^2-x^2)$ ou son carré $x^2(a^2-x^2)^2$ sera maximum. En regardant x^2 comme la variable, nous avons deux facteurs variables x^2 et a^2-x^2 dont la somme est constante; le maximum a lieu quand ces facteurs sont proportionnels aux exposants 1 et 2, c'est-à-dire quand on a

$$\frac{x^2}{1}=\frac{a^2-x^2}{2}=\frac{a^2}{3};$$

d'où

$$x = \frac{a}{\sqrt{3}}, \quad y = \frac{2a}{\sqrt{3}}.$$

Ainsi, de tous les cylindres de même surface totale, le plus grand est celui dont la hauteur égale le diamètre de la base.

181. Remarque. Un grand nombre de questions de maximum et de minimum se correspondent deux à deux, de telle sorte qu'à un maximum dans l'une se rapporte un minimum dans l'autre. Soient u et v deux quantités variables, telles qu'à chaque valeur de u correspondent une série de valeurs de v et à chaque valeur de v une série de valeurs de u. Appelons b la plus grande des valeurs de v qui correspondent à une même valeur a de u, et b' la plus grande des valeurs de v qui correspondent à une autre valeur a' de u; si la seconde valeur a' attribuée à u est plus petite que a, nous supposons que le second maximum b' est plus petit que le premier b. Inversement, je dis que a est la plus petite des valeurs de u qui correspondent à la valeur b attribuée à v. On remarque d'abord que a est l'une de ces valeurs; d'autre part, il est impossible que u prenne une valeur a' plus petite que a; car les valeurs de v qui correspondent à cette valeur a' de u étant toutes égales ou inférieures à la quantité b' qui est plus petite que b, aucune d'elles n'est égale à b.

De même, appelons b la plus petite des valeurs de v qui correspondent à une valeur a de u, et b' la plus petite des valeurs de v qui correspondent à une autre valeur a' de u; si a' est plus grand que a, nous supposons le second minimum b' plus grand que le premier b. On démontrera de la même manière que, inversement, a est la plus grande des valeurs de u qui correspondent à la valeur b de v.

Ainsi, quand les deux quantités variables u et v ont des

valeurs a et b telles que b soit *la plus petite* ou *la plus grande* des valeurs de v qui correspondent à la valeur a de u, si b augmente ou diminue avec a, inversement a est *la plus grande* ou *la plus petite* des valeurs de u qui correspondent à la valeur b de v.

Supposons, par exemple, que u et v désignent le périmètre et la surface d'un rectangle. Comme il existe une infinité de rectangles ayant même périmètre, à une même valeur du périmètre u correspondent une infinité de valeurs de la surface v. De même, comme il existe une infinité de rectangles ayant la même surface, à une même valeur de v correspondent une infinité de valeurs de u. Nous avons vu (nº 165) que, de tous les rectangles ayant même périmètre a, le plus grand est le carré ; appelons b l'aire de ce carré ; il est évident, d'ailleurs, que l'aire b du carré diminue avec son périmètre a. On en conclut que, inversement, de tous les rectangles qui ont même surface b, ce carré est celui qui a le plus grand périmètre a.

Nous avons vu aussi (nº 179) que. de tous les triangles de même périmètre, le triangle équilatéral est le plus grand. D'ailleurs l'aire du triangle équilatéral diminue avec son périmètre. On en conclut que, de tous les triangles de même surface, le triangle équilatéral est celui qui a le plus grand périmètre.

Nous avons supposé, dans la démonstration du théorème précédent, que b augmente ou diminue avec a ; si b augmentait quand a diminue, on considérerait les quantités variables u et $\frac{1}{v}$. A un maximum de u correspondrait un minimum de $\frac{1}{v}$, et par suite un maximum de v.

CHAPITRE IV.

ÉQUATIONS RÉDUCTIBLES DU SECOND DEGRÉ.

Équations bicarrées.

182. On nomme équations bicarrées, des équations du quatrième degré qui ne renferment que les puissances paires de l'inconnue. La forme générale de l'équation bicarrée est

$$(1) \qquad ax^4 + bx^2 + c = 0.$$

Si l'on pose $x^2 = y$, prenant pour inconnue nouvelle y, l'équation se ramène à l'équation du second degré

$$(2) \qquad ay^2 + by + c = 0.$$

On en déduit

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Mais, comme $x = \pm\sqrt{y}$, on a finalement

$$x = \pm\sqrt{\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}.$$

Chacune des valeurs de y donne pour x deux valeurs égales et de signes contraires. Ainsi l'équation bicarrée admet quatre racines, égales deux à deux et de signes contraires.

Si l'équation (2) a ses deux racines réelles et positives,

l'équation bicarrée a ses quatre racines réelles. Si l'une des racines de l'équation (2) est positive, l'autre négative, l'équation (1) admet deux racines réelles et deux imaginaires. Si les deux racines de l'équation (2) sont négatives ou imaginaires, les quatre racines de l'équation (1) sont imaginaires.

Exemples.

183. QUESTION I. Résoudre les deux équations

$$xy = 6,$$
$$y^2 - x^2 = 5.$$

En tirant de la première

$$y = \frac{6}{x},$$

et substituant dans la seconde, on arrive à l'équation du quatrième degré bicarrée

$$x^4 + 5x^2 - 36 = 0,$$

d'où l'on déduit

$$x = \pm\sqrt{\frac{-5 \pm \sqrt{169}}{2}} = \pm\sqrt{\frac{-5 \pm 13}{2}}.$$

Les deux valeurs de x^2 sont réelles, l'une positive 4, l'autre négative -9; la valeur positive donne pour x deux racines réelles

$$x = \pm 2; \quad \text{d'où} \quad y = \pm 3;$$

la valeur négative donne deux racines imaginaires

$$x = \pm 3i, \quad \text{d'où} \quad y = \frac{6}{\pm 3i} = \mp 2i.$$

184. QUESTION II. *Déterminer un cône circulaire droit, connaissant sa surface totale et son volume.*

Désignons par x le rayon de la base, par y le côté, et représentons par $4\pi a^2$ la surface et par $\frac{4}{3}\pi b^3$ le volume du cône, nous avons les deux équations

$$(1) \qquad x^2 + xy = 4a^2,$$

$$(2) \qquad x^2\sqrt{y^2 - x^2} = 4b^3.$$

Si, dans la seconde équation, on remplace y par sa valeur

$$(3) \qquad y = \frac{4a^2 - x^2}{x}$$

tirée de la première, on obtient l'équation

$$(4) \qquad ax\sqrt{4a^2 - 2x^2} = 2b^3,$$

qui, par l'élévation au carré, devient l'équation bicarrée

$$(5) \qquad a^2x^4 - 2a^4x^2 + 2b^6 = 0.$$

Cette équation aura deux racines réelles et positives, si la condition $b^6 < \frac{a^6}{2}$ est remplie. Chacune de ces racines vérifiant l'équation (4) et rendant le radical réel, est moindre que $a\sqrt{2}$, et par suite donne pour y une valeur positive plus grande que x; on a ainsi deux solutions. Quand on a $b^6 = \frac{a^6}{2}$, les deux racines sont égales et l'on a $x = a$, $y = 3a$.

Si l'on suppose que la surface totale du cône soit constante et que l'on fasse varier le volume, on voit que le volume acquerra sa valeur maximum, quand le côté du cône sera égal à trois fois le rayon de la base.

Au reste l'étude de la variation du volume se ramène à celle d'un polynôme du second degré. On a, en effet,

$$2b^6 = a^2(2a^2x - x^4) = a^2\,[a^4 - (x^2 - a^2)^2].$$

Quand x croît de o à a, et de a à $a\sqrt{2}$, le volume augmente de zéro à sa valeur maximum pour diminuer ensuite jusqu'à zéro.

185. Question III. ***Dans une sphère donnée, inscrire un cylindre ayant une surface totale donnée.***

Appelons r le rayon de la sphère, x le rayon de la base du cylindre, $2y$ sa hauteur, et représentons la surface totale par $4\pi a^2$. Nous aurons les deux équations

$$(1) \qquad x^2 + y^2 = r^2,$$
$$(2) \qquad 2\pi x^2 + 4\pi xy = 4\pi a^2.$$

Si, dans la première équation, on substitue la valeur

$$(3) \qquad y = \frac{2a^2 - x^2}{2x},$$

tirée de la seconde, on arrive à l'équation bicarrée

$$(4) \qquad 5x^4 - 4(a^2 + r^2)x^2 + 4a^4 = 0,$$

d'où l'on déduit

$$(5) \qquad x = \sqrt{\frac{2(a^2+r^2) \pm 2\sqrt{(a^2 + r^2)^2 - 5a^4}}{5}}.$$

La valeur de x devant être positive, il est inutile d'écrire le signe $\pm$ devant le grand radical.

Pour que l'équation (4), du second degré en x^2, ait ses racines réelles, il est nécessaire que l'on ait

$$(a^2 + r^2)^2 > 5a^4,$$

ou

$$a^2 + r^2 > a^2\sqrt{5}.$$

Il en résulte la condition

$$a^2 < \frac{r^2}{\sqrt{5} - 1},$$

ou

$$a^2 < \frac{r^2(\sqrt{5}+1)}{4}.$$

Si cette condition est remplie, les deux valeurs de x^2 sont réelles et positives. Appelons x'^2 la plus petite, x''^2 la plus grande.

Si l'on substitue chacune de ces valeurs dans l'équation (3), on aura pour y deux valeurs correspondantes y' et y''. Mais la valeur de y doit aussi être positive; il faut donc que l'on ait

$$x^2 < 2a^2.$$

Quand on remplace x^2 par $2a^2$, le premier membre de l'équation (4) devient égal à $8a^2(2a^2 - r^2)$. Si $a^2 < \frac{r^2}{2}$, le résultat étant négatif, la plus petite racine x'^2 étant inférieure à $2a^2$, donne une solution du problème; la plus grande, étant supérieure à $2a^2$, ne convient pas à la question. Si $a^2 > \frac{r^2}{2}$, les deux racines sont toutes deux, ou inférieures, ou supérieures à $2a^2$; mais elles ne peuvent être supérieures à $2a^2$, puisque leur produit est égal à $\frac{4a^4}{5}$; donc elles sont inférieures à $2a^2$, et donnent deux solutions de la question.

En résumé, pour que le problème soit possible, il faut que la surface totale du cylindre soit plus petite que $\pi r^2(\sqrt{5}+1)$. Si cette surface est plus petite que $2\pi r^2$, le problème admet une solution; si la surface est plus grande que $2\pi r^2$, tout en étant moindre que le maximum, le problème admet deux solutions.

On voit par là que, lorsqu'on fait varier le rayon x du

cylindre de o à r, la surface augmente de o au maximum $\pi r^2(\sqrt{5}+1)$, pour diminuer ensuite de ce maximum à $2\pi r^2$.

* *Transformation des expressions de la forme* $\sqrt{a \pm \sqrt{b}}$.

186. Les quantités irrationnelles de cette forme proviennent, comme nous l'avons vu, des équations bicarrées; il est possible quelquefois de les transformer en une somme ou en une différence de deux radicaux simples, et ceci offre un certain avantage en rendant le calcul plus simple et plus facile. Mais nous allons d'abord établir un principe qui nous servira.

Lorsque deux quantités INCOMMENSURABLES ***de la forme*** $a \pm \sqrt{b}$, ***les lettres*** a ***et*** b ***désignant deux quantités commensurables, sont égales, les parties commensurables sont égales, ainsi que les parties incommensurables.*** Je dis, par exemple, que l'égalité

$$a+\sqrt{b}=a'+\sqrt{b'},$$

dans laquelle les lettres a et a' désignent des quantités commensurables quelconques, b et b' des quantités commensurables non carrés parfaits, ne peut avoir lieu que si l'on a séparément $a=a'$, $b=b'$. En effet, de l'égalité précédente, on déduit

$$\sqrt{b}=(a'-a)+\sqrt{b'},$$

et, en élevant au carré les deux membres,

$$b=(a'-a)^2+b'+2(a'-a)\sqrt{b'}.$$

Si a était différent de a', on aurait

$$\sqrt{b'}=\frac{b-b'-(a'-a)^2}{2(a'-a)},$$

et la quantité incommensurable $\sqrt{b'}$ serait égale à une quan-

tité commensurable, ce qui est impossible. Il faut donc que l'on ait $a = a'$; mais alors on a aussi $b = b'$.

187. Proposons-nous maintenant de transformer l'expression $\sqrt{a + \sqrt{b}}$, dans laquelle a et b désignent des nombres positifs commensurables, en une somme de deux radicaux simples. Posons donc

$$\sqrt{a + \sqrt{b}} = \sqrt{x} + \sqrt{y}.$$

Nous voulons que les deux nombres cherchés x et y soient commensurables. En élevant les deux membres au carré, on a

$$a + \sqrt{b} = x + y + 2\sqrt{xy}.$$

En vertu du principe précédemment établi, cette égalité ne peut avoir lieu que si l'on a séparément

$$x + y = a,$$
$$4xy = b.$$

Nous connaissons la somme et le produit des deux inconnues ; ces deux inconnues sont donc les racines de l'équation du second degré

$$u^2 - au + \frac{b}{4} = 0,$$

d'où

$$u = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - b}}{2}.$$

On voit que les nombres cherchés seront commensurables lorsque la quantité $a^2 - b$ est un carré parfait. En désignant par k^2 ce carré, on a ainsi

$$\sqrt{a + \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + k}{2}} + \sqrt{\frac{a - k}{2}}.$$

La transformation de l'expression $\sqrt{a - \sqrt{b}}$ s'effectuera

de la même manière. On posera

$$\sqrt{a-\sqrt{b}}=\sqrt{x}-\sqrt{y};$$

d'où l'on déduit

$$a-\sqrt{b}=x+y-2\sqrt{xy},$$

et par suite

$$x+y=a,$$
$$4xy=b.$$

Les valeurs de x et de y sont donc les mêmes que précédemment. La transformation sera possible si la quantité a^2-b est un carré parfait. En désignant par k^2 ce carré, on a

$$\sqrt{a-\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+k}{2}}-\sqrt{\frac{a-k}{2}}.$$

Applications. 1° Transformer l'expression $\sqrt{7+\sqrt{13}}$. La quantité 7^2-13 ou 36 étant égale au carré de 6, la transformation est possible et l'on aura

$$\sqrt{7+\sqrt{13}}=\sqrt{\frac{7+6}{2}}+\sqrt{\frac{7-6}{2}}=\sqrt{\frac{13}{2}}+\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{26}+\sqrt{2}}{2}.$$

2° Transformer l'expression $\sqrt{6-2\sqrt{5}}$. On la mettra sous la forme $\sqrt{6-\sqrt{20}}$, en faisant passer le facteur 2 sous le radical. La quantité 6^2-20 ou 16 étant égale au carré de 4, la transformation est possible et l'on aura

$$\sqrt{6-\sqrt{20}}=\sqrt{\frac{6+4}{2}}-\sqrt{\frac{6-4}{2}}=\sqrt{5}-1.$$

* *Équations trinômes.*

188. Considérons une équation de la forme

$$(1)\qquad ax^{2m}+bx^m+c=0.$$

En posant $x^m=y$, on est ramené à l'équation du second

degré

$$(2) \qquad ay^2 + by + c = 0.$$

Une fois les valeurs de y connues, on obtient celle de x par la formule

$$(3) \qquad x = \sqrt[m]{y}.$$

Il y a plusieurs cas à examiner;

1° Si m est pair, toute valeur réelle positive de y donne pour x deux valeurs réelles, égales et de signes contraires. Mais une valeur négative de y ne donne pour x que des valeurs imaginaires; car les puissances paires des quantités réelles, positives ou négatives, sont toujours positives. C'est ce que nous avons vu dans la résolution des équations bicarrées.

2° Si m est impair, toute valeur réelle de y donne pour x une valeur réelle de même signe et une seule. Soit, par exemple, l'équation

$$x^6 - 19x^3 - 216 = 0;$$

l'équation du second degré

$$y^2 - 19y - 216 = 0,$$

que l'on obtient en posant $x^3 = y$, a pour racines -8 et $+27$; l'équation proposée admet les deux racines réelles -2 et $+3$.

Outre les racines réelles dont nous venons de parler, l'équation admet encore des racines imaginaires dont il sera question plus tard.

Exercices sur le Livre III.

QUESTION I. Trouver le point également éclairé par deux lumières sur la droite qui les joint.

QUESTION II. Partager un trapèze en deux parties équivalentes par une droite parallèle aux deux bases.

QUESTION III. Dans un cercle inscrire un rectangle ayant une aire donnée. = Maximum de ce rectangle.

Réponse : Le rectangle maximum est le carré.

Question IV. Trouver les côtés d'un triangle rectangle, connaissant le périmètre et la surface.

Question V. Trouver les côtés d'un triangle rectangle, connaissant l'hypoténuse et la somme obtenue en ajoutant la hauteur aux deux côtés de l'angle droit.

Question VI. Trouver les côtés d'un triangle rectangle, connaissant la hauteur et la somme des côtés de l'angle droit.

Question VII. Trouver les côtés d'un triangle rectangle, connaissant le périmètre et la somme de l'hypoténuse et de la hauteur.

Question VIII. Couper une sphère par un plan, de telle sorte que le segment détaché ait un volume égal au cône ayant pour sommet le centre de la sphère et pour base la section faite dans la sphère par le plan.

Réponse : On mènera le plan sécant à une distance du centre égal au plus grand segment du rayon partagé en moyenne et extrême raison.

Question IX. Dans un cône droit, inscrire un cylindre ayant une surface latérale donnée. = Maximum de cette surface.

Réponse : La surface latérale est maximum quand la hauteur du cylindre est moitié de celle du cône.

Question X. Dans un triangle isocèle inscrire un rectangle ayant une surface donnée.

Question XI. Circonscrire à un rectangle un triangle isocèle ayant une surface donnée.

Question XII. Déterminer un triangle isocèle connaissant les deux côtés égaux de la surface.

Question XIII. Un hexagone est formé par des triangles isocèles égaux, placés sur les côtés d'un triangle équilatéral. Déterminer cet hexagone connaissant le périmètre et la surface.

Question XIV. On forme un octogone en enlevant sur les angles d'un carré quatre triangles rectangles isocèles égaux ; déterminer cet octogone connaissant le périmètre et la surface.

Question XV. Déterminer un secteur circulaire connaissant le périmètre et la surface.

Question XVI. Étant donné un prisme droit à base carrée, on joint deux à deux les milieux des côtés de la base supérieure ; par un point pris sur le prolongement de l'axe du prisme et les quatre côtés du carré inscrit on mène des plans qui détachent du prisme quatre tétraèdres, et qui les remplacent par une pyramide à base carrée placée au-dessus du prisme. Démontrer que le volume du solide ainsi formé est constant, et déterminer la position du sommet sur l'axe, de manière que la surface ait une valeur donnée.

Question XVII. Étant donnés un cercle, un point A sur la circonférence, un point B sur le diamètre qui passe en A ; on joint les deux points fixes A et B à un point quelconque M de la circonférence ; déterminer la position du point M de manière que la ligne brisée AM + MB ait une longueur donnée.

Question XVIII. Étant donné un vase cylindrique plein d'air, dans lequel pénètre un tube vertical ; par le tube on verse une certaine quantité d'eau ; déterminer la hauteur à laquelle s'élèvera le niveau de l'eau dans le vase et dans le tube.

QUESTION XIX. Déterminer les côtés d'un triangle rectangle, connaissant le périmètre et la somme des surfaces engendrées par les deux côtés de l'angle droit tournant autour de l'hypoténuse.

QUESTION XX. Dans un demi-cercle inscrire un trapèze de périmètre donné. = Maximum de ce périmètre.

QUESTION XXI. Circonscrire à une sphère un cône dont la base repose sur un plan diamétral et qui ait une surface donnée. = Minimum de cette surface.

Réponse : Le cône dont la surface totale est minimum est celui qui a pour section un triangle équilatéral. Cette surface minimum égale celle de la sphère.

QUESTION XXII. Un cercle étant inscrit dans un angle droit, mener à ce cercle une tangente telle que le triangle ainsi formé ait une surface donnée. = Minimum et maximum de cette surface.

QUESTION XXIII. Par un point donné dans l'intérieur d'un cercle, mener deux cordes rectangulaires telles qu'en joignant leurs extrémités on forme un quadrilatère ayant une aire donnée.

QUESTION XXIV. Avec un levier pesant de seconde espèce, on veut soulever un poids donné appliqué à point donné. Quelle longueur faut-il donner au levier pour que la puissance soit minimum, en tenant compte du poids de levier?

QUESTION XXV. Cône maximum inscrit dans une sphère.

QUESTION XXVI. Triangle isocèle maximum inscrit dans un cercle.

QUESTION XXVII. On commence à faire mouvoir le piston d'une pompe aspirante. Trouver à quelle hauteur s'élèvera l'eau dans le tuyau d'aspiration, après le premier, le second, le troisième... coup de piston.

Application numérique. La section du corps de pompe est de 0,01 mètre carré, celle du tuyau d'aspiration de 0,002; la course du piston de $0^m,4$, la longueur du tuyau d'aspiration de 8 mètres. On représentera la pression atmosphérique par une colonne de $1^m,330$.

On trouvera pour l'élévation de l'eau, après chaque coup de piston :

	mètres.	mètres.
1er coup	1,07	1,07
2e	1,08	2,16
3e	1,09	3,25
4e	1,11	4,36
5e	1,14	5,50
6e	1,18	6,68
7e	1,29	7,97

La pompe fonctionnera après le huitième coup de piston.

Dans une sphère mener un plan BC tel que le volume du cône ABC circonscrit soit divisé en deux parties égales par la calotte BDC. Plus généralement dans un rapport donné.

LIVRE IV.

PROGRESSIONS ET LOGARITHMES.

CHAPITRE PREMIER.

PROGRESSIONS ARITHMÉTIQUES.

Définition.

189. On appelle *progression arithmétique* une suite de quantités telles que la différence entre deux quantités consécutives est constante. Ces diverses quantités sont les *termes* de la progression. L'excès d'un terme quelconque sur le précédent se nomme *raison* de la progression.

La progression est *croissante*, lorsque les termes vont en augmentant. Dans ce cas, la raison est positive. Ainsi la progression croissante

$$\div 2 . 5 . 8 . 11 . 14 . 17 . 20$$

a pour raison $+ 3$.

Au contraire la progression est *décroissante*, lorsque les termes vont en diminuant. Dans ce cas, la raison est négative. Ainsi la progression décroissante

$$\div 20 . 17 . 14 . 11 . 8 . 5 . 2$$

a pour raison $— 3$.

Théorème I.

190. ***Dans une progression arithmétique, un terme de rang quelconque égale le premier plus autant de fois la raison qu'il y a de termes avant lui.***

Appelons a, b, c, d,....... les différents termes de la progression, r la raison. D'après la définition même de la progression, le second terme égale le premier, plus la raison,

$$b = a + r.$$

Le troisième terme égale le second plus la raison, et par conséquent le premier plus deux fois la raison,

$$c = b + r = a + r + r = a + 2r.$$

Le quatrième terme égale le troisième plus la raison, et par conséquent le premier plus trois fois la raison,

$$(1) \qquad d = c + r = a + 2r + r = a + 3r;$$

et ainsi de suite. En général le terme qui occupe le n^e rang, et qui par conséquent en a $n-1$ avant lui, égale

$$a + (n-1)r.$$

Ainsi la progression arithmétique peut être mise sous la forme

$$\div\, a \,.\, a + r \,.\, a + 2r \,.\, a + 3r \,.....$$

191. Remarque. Les termes d'une progression arithmétique croissante augmentent indéfiniment de manière à devenir plus grands que toute quantité donnée. En effet, le terme de rang n sera plus grand que la quantité donnée A, si l'on a

$$a + (n-1)r > \mathrm{A},$$

ou

$$(n-1)r > \mathrm{A} - a,$$

et, en divisant par le nombre positif r,

$$n - 1 > \frac{A - a}{r},$$

$$n > \frac{A - a}{r} + 1.$$

Ainsi, dès que le rang surpasse la quantité $\frac{A - a}{r} + 1$, le terme surpasse la quantité A, si grande qu'elle soit.

Considérons, par exemple, la progression croissante indéfinie

$$\div 2 . 5 . 8 . 11 \ldots\ldots$$

Pour avoir un terme plus grand que 1000, on prendra

$$n > \frac{1000 - 2}{3} + 1,$$

c'est-à-dire

$$n > 333 + \frac{2}{3}.$$

Le 334ᵉ terme est plus grand que 1000.

192. ***Insérer entre deux quantités données un certain nombre de moyens arithmétiques.*** On appelle moyens arithmétiques, insérés entre deux quantités données, des quantités qui forment une progression arithmétique dont les deux quantités données sont les deux extrêmes. La question revient à trouver la raison de la progression.

Soit à insérer n moyens arithmétiques entre les deux quantités a et b. Le terme b de la progression égale le premier terme a, plus autant de fois la raison qu'il y a de termes avant lui, c'est-à-dire plus $n + 1$ fois la raison. On a donc

$$b = a + (n + 1)r,$$

d'où l'on déduit

(2) $$r = \frac{b - a}{n + 1}.$$

Ainsi, *on obtient la raison de la progression en divisant la différence des deux quantités données par le nombre des moyens à insérer plus un.*

Si, par exemple, on veut insérer 5 moyens entre les deux nombres 2 et 20, on prendra

$$r = \frac{20 - 2}{5 + 1} = 3,$$

et l'on formera la progression

$$\div 2.5.8.11.14.17.20.$$

THÉORÈME II.

193. *Si, entre deux termes consécutifs d'une progression arithmétique, on insère le même nombre de moyens, les progressions partielles ainsi obtenues forment une seule et même progression.*

En effet, puisqu'on insère le même nombre de moyens entre deux termes consécutifs, et que la différence de ces deux termes est constante, la raison est la même dans toutes les progressions partielles; et comme le dernier terme de chacune d'elles est le premier de la suivante, ces progressions partielles se continuent de manière à ne former qu'une seule et même progression.

THÉORÈME III.

194. *Dans toute progression arithmétique, la somme de deux termes également distants des extrêmes est constante.*

Soit la progression

$$\div a.b.c.........h.k.l.$$

Je considère le second terme et l'avant-dernier; le second terme égale le premier plus la raison,

$$b = a + r;$$

l'avant-dernier égale le dernier, moins la raison,

$$k = l - r.$$

En ajoutant ces deux égalités membre à membre, on a

$$b + k = a + l.$$

On a de même, en considérant les termes c et h,

$$c = b + r,\ h = k - r;$$

d'où l'on déduit

$$c + h = b + k.$$

Et ainsi de suite.

Lorsque la progression contient un nombre impair de termes, il y a au milieu un terme également distant des deux extrêmes. Deux fois ce terme égale la somme des extrêmes.

Ainsi, dans la progression

$$\div 2.5.8.11.14.17.20,$$

les termes 2 et 20, 5 et 17, 8 et 14, donnent la même somme 22, qui est égale à deux fois le terme du milieu 11.

Théorème IV.

195. *La somme des termes d'une progression arithmétique égale la moitié du produit que l'on obtient en multipliant la somme des extrêmes par le nombre des termes.*

Soit toujours la progression

$$\div a.b.c.........h.k.l.$$

Appelons n le nombre des termes, s la somme des termes, et écrivons cette somme au-dessous d'elle-même en ordre inverse,

$$s = a + b + c\ldots\ldots + h + k + l,$$
$$s = l + k + h\ldots\ldots + c + b + a.$$

On voit que les deux termes placés l'un au-dessous de l'autre sont également distants des extrêmes dans la progression, et que par conséquent leur somme est constante et égale à la somme des extrêmes $a+l$. Si donc on ajoute les deux sommes terme à terme, la somme totale $2s$ se composera de la somme des extrêmes répétée autant de fois qu'il y a de termes dans la progression. On aura ainsi

$$2s=(a+l)n,$$

d'où

$$(3) \qquad s=\frac{(a+l)n}{2}.$$

Par exemple, la somme des termes de la progression

$$2.5.8.11.14.17.20$$

est 77.

Si l'on remplace le dernier terme l par sa valeur

$$l=a+(n-1)r,$$

on obtient cette autre formule

$$(4) \qquad s=na+\frac{n(n-1)}{2}r.$$

Applications. 1° La somme des n premiers nombres entiers

$$1+2+3\ldots\ldots+n$$

est égale à

$$\frac{n(n+1)}{2}.$$

2° La somme des n premiers nombres impairs

$$1+3+5\ldots\ldots+(2n-1),$$

est égale à n^2.

Ainsi

$$1+3=2^2, \quad 1+3+5=3^2, \quad 1+3+5+7=4^2, \text{ etc.}$$

3° Trouver le nombre des termes d'une progression

arithmétique, connaissant le premier terme, la raison, et la somme des termes.

Appelons s la somme des termes; la formule

$$s = na + \frac{n(n-1)}{2}r$$

donne, pour déterminer n, une équation du second degré

$$rn^2 + (2a - r)n - 2s = 0.$$

Le dernier terme étant négatif, les deux racines sont toujours réelles et de signes contraires. On rejettera la racine négative. Pour que la racine positive sont admissible, il faut qu'elle soit entière.

4° Trouver cinq nombres en progression arithmétique, connaissant la somme des termes et celle de leurs carrés.

Appelons a et b^2 les deux sommes données; désignons par x le terme du milieu et par y la raison. Les différents termes de la progression s'écriront

$$\div x - 2y . x - y . x . x + y . x + 2y,$$

et l'on aura les deux équations

$$5x = a,$$
$$5x^2 + 10y^2 = b^2.$$

CHAPITRE II.

PROGRESSIONS GÉOMÉTRIQUES.

Définition.

196. On appelle ***progression géométrique*** une suite de quantités telles que le rapport de deux consécutives est constant. Le rapport de chaque terme au précédent se nomme ***raison.***

La progression est croissante, lorsque la raison est plus grande que l'unité. Ainsi la progression géométrique croissante

$$\div\!\div\ 2 : 6 : 18 : 54 : 162 : 486 : 1458$$

a pour raison 3.

La progression est décroissante, lorsque la raison est plus petite que l'unité. Ainsi la progression géométrique décroissante

$$\div\!\div\ 1458 : 486 : 162 : 54 : 18 : 6 : 2$$

a pour raison $\frac{1}{3}$.

THÉORÈME I.

197. ***Dans une progression géométrique, un terme de rang quelconque égale le premier terme multiplié par la raison élevée à une puissance marquée par le nombre des termes qui précèdent.***

Appelons a, b, c, d,....... les différents termes de la

progression, r la raison. D'après la définition même de la progression géométrique, le second terme égale le premier multiplié par la raison,

$$b = ar.$$

Le troisième terme égale le second multiplié par la raison, et par conséquent le premier multiplié par la seconde puissance de la raison,

$$c = br = arr = ar^2.$$

Le quatrième terme égale le troisième multiplié par la raison, et par conséquent le premier multiplié par la troisième puissance de la raison,

$$d = cr = ar^2r = ar^3,$$

et ainsi de suite. En général le terme qui occupe le n^e rang, et par conséquent en a $n - 1$ avant lui, égale

$$ar^{n-1}. \tag{1}$$

Ainsi la progression géométrique peut être mise sous la forme

$$\div\!\div\; a : ar : ar^2 : ar^3 : \ldots\ldots;$$

les différents termes sont égaux au premier multiplié par les puissances successives de la raison.

198. Remarque I. *Les termes d'une progression géométrique croissante augmentent indéfiniment.*

Puisque la progression est croissante, la raison r est plus grande que l'unité, et nous pouvons la représenter par $1 + \alpha$ (α étant une quantité positive, aussi petite qu'on veut). Considérons d'abord la progression

$$\div\!\div\; 1 : 1 + \alpha : (1 + \alpha)^2 : (1 + \alpha)^3 \ldots\ldots$$

formée par les puissances successives de la raison. Cher-

chons la différence entre deux termes consécutifs quelconques. De la relation

$$(1+\alpha)^{n+1}=(1+\alpha)^n\times(1+\alpha)=(1+\alpha)^n+\alpha(1+\alpha)^n,$$

on déduit

$$(1+\alpha)^{n+1}-(1+\alpha)^n=\alpha(1+\alpha)^n;$$

le facteur $(1+\alpha)^n$, dans le second membre, étant plus grand que l'unité, il en résulte que la différence cherchée est plus grande que α, excepté pour les deux premiers termes, dont la différence est égale à α. Ainsi, les termes de la progression géométrique, formée par les puissances successives de la raison, sont plus grands que les termes correspondants de la progression arithmétique

$$\div 1 \,.\, 1+\alpha \,.\, 1+2\alpha \,.\, 1+3\alpha \ldots\ldots$$

Mais ces derniers augmentent indéfiniment, de manière à devenir plus grands que toute quantité donnée (nº 191) ; il en est de même à plus forte raison des premiers.

Un terme quelconque d'une progression géométrique croissante a pour expression $ad(1+\alpha)^n$; nous venons de démontrer que, lorsque n croît indéfiniment, $(1+\alpha)^n$ augmente indéfiniment; le produit $a(1+\alpha)^n$ de cette quantité par le premier terme a jouit évidemment de la même propriété.

199. Remarque II. *Les termes d'une progression géométrique décroissante tendent vers zéro, quand on prolonge indéfiniment la progression.* La raison, étant plus petite que l'unité, peut être représentée par $\frac{1}{1+\alpha}$; un terme quelconque de la progression sera

$$\frac{a}{(1+\alpha)^n}.$$

Quand n croît indéfiniment, le dénominateur augmentant indéfiniment, la fraction tend vers zéro.

200. *Insérer entre deux nombres un certain nombre de moyens géométriques.* On appelle moyens géométriques, insérés entre deux nombres donnés, des nombres qui forment une progression géométrique dont les nombres donnés sont les deux extrêmes. La question revient évidemment à trouver la raison de la progression.

Soit à insérer n moyens entre a et b. En appelant r la raison cherchée, on a

$$b = ar^{n+1};$$

d'où l'on tire

$$(2) \qquad r = \sqrt[n+1]{\frac{b}{a}}.$$

Ainsi, *on obtient la raison de la progression en extrayant du quotient des deux nombres donnés une racine ayant pour indice le nombre de moyens à insérer plus un.*

Théorème II.

201. *Si, entre deux termes consécutifs d'une progression géométrique, on insère un même nombre de moyens, les progressions partielles ainsi obtenues forment une seule et même progression.*

En effet, puisqu'on insère le même nombre de moyens entre deux termes consécutifs de la progression, et que le quotient de ces deux termes est constant, la raison sera la même dans toutes les progressions partielles. Et comme le dernier terme de chacune d'elles égale le premier de la suivante, ces progressions partielles se continuent de manière à ne former qu'une seule et même progression.

Théorème III.

202. *Dans toute progression géométrique, le produit de deux termes également distants des extrêmes est constant.*

Soit la progression

$$\div\!\!\div\, a : b : c \ldots\ldots : h : k : l.$$

Je considère le second terme et l'avant-dernier ; le second terme égale le premier multiplié par la raison,

$$b = ar ;$$

l'avant-dernier égale le dernier divisé par la raison,

$$k = \frac{l}{r}.$$

On a donc

$$bk = al.$$

On a de même, en considérant les deux termes c et h,

$$c = br,\ h = \frac{k}{r};$$

d'où l'on déduit

$$ch = bk,$$

et ainsi de suite.

Lorsque la progression contient un nombre impair de termes, il y a au milieu un terme également distant des extrêmes. Le carré de ce terme égale le produit des extrêmes.

Ainsi, dans la progression

$$\div\!\!\div\, 2 : 6 : 18 : 54 : 162 : 486 : 1458,$$

les termes 2 et 1458, 6 et 486, 18 et 162 donnent le même produit 2916, qui est le carré du terme du milieu 54.

Théorème IV.

203. *Le produit des termes d'une progression géométrique égale la racine carrée du produit des extrêmes élevé à une puissance marquée par le nombre des termes.*

Soit la progression

$$\div\div a : b : c \ldots\ldots : a : k : l.$$

Appelons n le nombre des termes, P le produit des termes. Écrivons ce produit au-dessus de lui-même en ordre inverse.

$$P = abc \ldots\ldots akl,$$
$$P = lka \ldots\ldots cba.$$

On voit que les deux facteurs placés l'un au-dessous de l'autre sont des termes également distants des extrêmes dans la progression, et que par conséquent leur produit est constant et égal au produit des extrêmes al. Si donc on multiplie les deux produits l'un par l'autre, le produit total se composera du produit des extrêmes élevé à une puissance marquée par le nombre des termes. On aura

$$P^2 = (al)^n;$$

d'où

$$(3) \qquad P = \sqrt{(al)^n}.$$

En remplaçant l par sa valeur

$$l = ar^{n-1},$$

on obtient cette autre formule

$$(4) \qquad P = \sqrt{a^{2n} r^{n(n-1)}} = a^n r^{\frac{n(n-1)}{2}},$$

qui n'exige plus l'extraction d'une racine carrée; car l'exposant $n(n-1)$, produit de deux nombres entiers consécutifs, est toujours pair.

THÉORÈME V.

204. *On obtient la somme des termes d'une progression géométrique en retranchant du premier terme le dernier multiplié par la raison et divisant la différence par l'unité moins la raison.*

Appelons S la somme cherchée,

$$S = a + ar + ar^2 \ldots\ldots + ar^{n-1}.$$

Multiplions-la par la raison r, nous avons

$$Sr = ar + ar^2 + ar^3 \ldots\ldots + ar^n.$$

Si nous retranchons cette seconde égalité de la première, tous les termes se détruisent dans les seconds membres, excepté le premier et le dernier, et il vient

$$S(1 - r) = a - ar^n;$$

d'où l'on déduit

$$(5) \qquad S = \frac{a - ar^n}{1 - r},$$

ou

$$(6) \qquad S = \frac{a - lr}{1 - r}.$$

On emploie cette formule telle qu'elle est, si la progression est décroissante. Mais si la progression est croissante, les deux termes de la fraction étant négatifs, on changera leurs signes, et l'on aura

$$(7) \qquad S = \frac{lr - 1}{r - 1}.$$

Exemple : la somme des termes de la progression géométrique croissante

$$\div\div 2 : 6 : 18 : 54 : 162 : 486 : 1458$$

est, d'après la formule (7),

$$S = \frac{1458 \times 3 - 2}{3 - 1} = 2186.$$

La somme des termes de la même progression écrite en ordre inverse et alors décroissante est, d'après la formule (6),

$$S = \frac{1458 - 2 \times \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = 2186.$$

Remarque. On obtient aussi les formules précédentes en écrivant la somme cherchée sous la forme

$$S = a(1 + r + r^2 \ldots\ldots + r^{n-1})$$

et remarquant que la parenthèse est le quotient de $1 - r^n$ par $1 - r$ (n° 68), ce qui donne immédiatement

$$S = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}.$$

Théorème VI.

205. ***La somme des termes d'une progression géométrique décroissante à l'infini tend vers une limite égale au premier terme divisé par l'unité moins la raison.***

Supposons que la progression géométrique décroissante

$$\div\!\div\, a : ar : ar^2 : \ldots\ldots$$

se prolonge indéfiniment. La somme des n premiers termes est donnée par la formule

$$(5) \qquad S = \frac{a - ar^n}{1 - r} = \frac{a}{1 - r} - \frac{ar^n}{1 - r}.$$

Si l'on prend un nombre de termes de plus en plus grand, la raison r étant plus petite que l'unité en valeur absolue, le terme ar^n de la progression décroissante diminue de plus en plus, et tend vers zéro, ainsi que la quantité $\frac{ar^n}{1 - r}$ quand n augmente indéfiniment; donc la somme des termes se rapproche indéfiniment de la quantité fixe $\frac{a}{1 - r}$, de manière à en différer aussi peu qu'on voudra. En un mot, la somme des termes tend vers la limite $\frac{a}{1 - r}$.

Le mode de convergence de la somme des termes vers sa

limite n'est pas le même, suivant que la raison est positive ou négative. Pour fixer les idées, supposons que le premier terme a soit une quantité positive. Lorsque la raison est positive, tous les termes de la progression sont positifs; dans ce cas, il est évident que la somme va en augmentant constamment, à mesure que l'on prend un plus grand nombre de termes; mais elle n'augmente pas au delà de toute limite, car elle reste toujours inférieure à la quantité fixe $\frac{a}{1-r}$; elle ne peut même atteindre rigoureusement cette limite, dont elle se rapproche indéfiniment.

Lorsque la raison est négative, les termes de la progression sont alternativement positifs et négatifs; la formule (5) montre que la somme des n premiers termes est tantôt plus petite, tantôt plus grande que la quantité fixe $\frac{a}{1-r}$, dont elle se rapproche de plus en plus; si n est pair, la différence $-\frac{ar^n}{1-r}$ est négative, et la somme plus petite que la limite; au contraire, si n est impair, la différence est positive et la somme plus grande que la limite; ainsi, dans ce cas, la somme des termes converge vers la limite $\frac{a}{1-r}$, en oscillant de part et d'autre.

Applications. 1° La somme des termes de la progression décroissante

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots..,$$

dont la raison est $\frac{1}{2}$, a pour limite

$$\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=1.$$

On voit bien sur cet exemple comment les sommes consécutives

$$\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \frac{15}{16}, \ldots,$$

que l'on obtient en prenant, le premier terme, les deux premiers, les trois premiers, etc., tendent vers la limite 1 ; la première somme diffère de l'unité de $\frac{1}{2}$, la seconde de $\frac{1}{4}$, la troisième de $\frac{1}{8}$, la quatrième de $\frac{1}{16}$, et ainsi de suite.

2° La somme des termes de la progression décroissante

$$\frac{3}{2} - \frac{3}{4} + \frac{3}{8} - \frac{3}{16} + \ldots,$$

dont la raison est $-\frac{1}{2}$, a pour limite

$$\frac{\frac{3}{2}}{1 + \frac{1}{2}} = 1.$$

Dans ce second exemple, la raison est négative et les sommes consécutives

$$\frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \frac{9}{8}, \frac{15}{16}, \frac{33}{32}, \ldots,$$

sont alternativement plus petites et plus grandes que la limite 1 ; la première surpasse l'unité de $\frac{1}{2}$, la seconde en diffère de $\frac{1}{4}$, la troisième la surpasse de $\frac{1}{8}$, la quatrième en diffère de $\frac{1}{16}$, etc.

3° Les fractions décimales périodiques sont des progres-

sions géométriques décroissantes. Par exemple, la fraction décimale périodique simple

$$0,353535\ldots\ldots$$

peut s'écrire

$$\frac{35}{100}+\frac{35}{100^2}+\frac{35}{100^3}+\ldots\ldots;$$

c'est une progression géométrique dont la raison est $\frac{1}{100}$.

La somme des termes tend vers la limite

$$\frac{\frac{35}{100}}{1-\frac{1}{100}}=\frac{35}{99}.$$

Cette limite est ce qu'on appelle la valeur de la fraction décimale périodique.

CHAPITRE III.

LOGARITHMES.

Définition.

206. Étant données deux progressions, l'une géométrique commençant par l'unité, l'autre arithmétique commençant par zéro,

$$\div\div\ 1 : a : a^2 : a^3 : a^4 \ldots\ldots,$$
$$\div\ 0 . b . 2b . 3b . 4b \ldots\ldots,$$

les termes de la progression arithmétique sont dits les *logarithmes* des termes correspondants de la progression géométrique. L'ensemble de ces deux progressions constitue ce qu'on appelle un *système* de logarithmes.

On suppose en général que la raison a de la progression géométrique est plus grande que l'unité, la raison b de la progression arithmétique étant d'ailleurs positive ; de cette manière les termes de la progression géométrique augmentent indéfiniment, de même que les termes de la progression arithmétique.

207. Nous avons défini de la sorte les logarithmes des nombres qui font partie de la progressiun géométrique ; il est facile d'étendre cette définition à tous les nombres. Concevons que l'on insère un très-grand nombre de moyens géométriques entre deux termes consécutifs de la progression géométrique, on formera une nouvelle progression géométrique procédant par intervalles beaucoup plus res-

serrés. Si, par exemple, on insère mille moyens géométriques en deux termes consécutifs, la nouvelle progression renfermera mille nombres entre 1 et a, mille entre a et a^2, etc. En insérant le même nombre de moyens arithmétiques entre deux termes consécutifs de la progression arithmétique, on formera une nouvelle progression arithmétique qui donnera exactement les logarithmes de tous les nombres inscrits dans la nouvelle progression géométrique, et approximativement les logarithmes de tous les autres nombres.

Soit $n - 1$ le nombre des moyens insérés. Appelons q la raison de la nouvelle progression géométrique, r celle de la nouvelle progression arithmétique; on a

$$q = \sqrt[n]{a}, \quad r = \frac{b}{n},$$

et les deux nouvelles progressions s'écrivent

$$\div\div 1 : q : q^2 : q^3 : \ldots\ldots,$$
$$\div 0 . r . 2r . 3r . \ldots\ldots$$

On voit que la raison r de la nouvelle progression arithmétique est aussi petite qu'on veut. Je vais démontrer que l'excès de la raison q de la nouvelle progression géométrique sur l'unité peut être aussi rendue plus petite qu'une quantité donnée α, si petite qu'elle soit. En effet, l'inégalité

$$\sqrt[n]{a} < 1 + \alpha$$

sera satisfaite si l'on a

$$a < (1 + \alpha)^n,$$

ou

$$(1 + \alpha)^n > a.$$

Or, si petite que soit α, on sait (n° 198) que n peut être pris assez grand pour que $(1 + \alpha)^n$ surpasse la quantité donnée a. Pour cette valeur de n et pour toutes les valeurs plus grandes, la raison q sera donc moindre que $1 + \alpha$.

Soit A un nombre positif quelconque plus grand que l'unité; si ce nombre fait partie de la nouvelle progression géométrique, le terme correspondant de la progression arithmétique donnera exactement son logarithme. Si ce nombre ne fait pas partie de la progression géométrique, il sera compris entre deux termes consécutifs q^m et q^{m+1}; or la différence de ces deux termes

$$q^{m+1} - q^m = q^m(q - 1),$$

étant moindre que $A\alpha$, puisque q^m est plus petit que A, et $q - 1$ plus petit que α, peut être rendue aussi petite qu'on veut; le nombre A différera donc de chacun des termes qui le comprennent aussi peu qu'on voudra. On prendra approximativement pour le logarithme de A celui de l'un d'eux, soit mr, soit $(m + 1)r$; l'erreur commise sur ce logarithme, étant moindre que la raison r ou $\frac{b}{n}$, sera aussi petite qu'on voudra.

Propriétés fondamentales des logarithmes.

THÉORÈME I.

208. *Le logarithme du produit de plusieurs facteurs égale la somme des logarithmes de ces facteurs.*

Considérons les deux progressions

$$\div\div 1 : q : q^2 : q^3 : q^4 : \ldots\ldots,$$
$$0 . r . 2r\ 3r . 4r \ldots\ldots,$$

au moyen desquelles on définit les logarithmes. Nous remarquons que les termes de la progression arithmétique sont les multiples successifs de la raison, et que les termes de la progression géométrique sont les puissances successives de la raison. Ces progressions sont disposées de manière que les termes qui occupent le même rang soient

placés l'un au-dessous de l'autre; on voit que, dans deux termes correspondants q^m et mr, le même nombre m sert à la fois d'exposant et de multiplicateur.

Je multiplie deux termes quelconques q^m et q^n de la progression géométrique, le produit q^{m+n} est aussi un terme de la progression géométrique. J'additionne leurs logarithmes, c'est-à-dire les deux termes correspondants mr et nr de la progression arithmétique; la somme $(m+n)r$ est aussi un terme de la progression arithmétique. Or on voit que le produit q^{m+n} et la somme $(m+n)r$ se correspondent dans les deux progressions. Donc le logarithme du produit égale la somme des logarithmes des facteurs.

En général, soient a et b deux nombres quelconques, on aura

$$\log(a \times b) = \log a + \log b.$$

Ce théorème s'étend évidemment à un nombre quelconque de facteurs.

Théorème II.

209. *Le logarithme d'un quotient égale le logarithme du dividende moins le logarithme du diviseur.*

Appelons c le quotient de a par b (a étant supposé plus grand que b). On a

$$a = b \times c,$$

et, d'après le théorème précédent,

$$\log a = \log b + \log c;$$

d'où

$$\log c = \log a - \log b.$$

ainsi

$$\log \frac{a}{b} = \log a - \log b.$$

THÉORÈME III.

210. *Le logarithme de la puissance d'un nombre égale le logarithme de ce nombre multiplié par l'indice de la puissance.*

En effet, la puissance a^m étant le produit de m facteurs égaux à a, on a

$$a^m = a \times a \times a \times \ldots\ldots;$$

d'où

$$\log a^m = \log a + \log a + \log a + \ldots\ldots,$$
$$\log a^m = m \log a.$$

Par exemple, le logarithme du carré d'un nombre égale deux fois le logarithme de ce nombre, le logarithme du cube égale trois fois le logarithme du nombre, etc.

THÉORÈME IV.

211. *Le logarithme de la racine d'un nombre égale le logarithme du nombre divisé par l'indice du radical.*

Appelons b la racine m^e de a; on a

$$a = b^m;$$

et, d'après le théorème précédent,

$$\log a = m \log b;$$

d'où

$$\log b = \frac{\log a}{m}.$$

Ainsi

$$\log \sqrt[m]{a} = \frac{\log a}{m}.$$

Par exemple, la racine carrée ou la racine cubique d'un nombre a pour logarithme la moitié ou le tiers du logarithme de ce nomboe.

212. REMARQUE. En arithmétique, on apprend à effectuer six opérations sur les nombres : trois opérations di-

rectes et trois opérations inverses. Les trois opérations directes sont, l'addition, la multiplication et l'élévation aux puissances. Les trois opérations inverses sont, la soustraction, la division et l'extraction des racines. La soustraction est l'opération inverse de l'addition; la division l'opération inverse de la multiplication; l'extraction des racines l'opération inverse de l'élévation aux puissances.

Il y a ainsi trois ordres d'opérations, comprenant chacune une opération directe et une opération inverse. Les opérations du premier ordre, addition et soustraction, s'effectuent facilement et avec rapidité; celles du second ordre, multiplication et division, sont déjà plus longues et plus difficiles; enfin celles du troisième ordre, puissance et racine, deviennent très-longues et très-pénibles. Les propriétés des logarithmes, que nous venons de démontrer, permettent de remplacer les opérations du second et du troisième ordre par celles d'un ordre moins élevé. Ainsi la multiplication et la division sont ramenées à l'addition et à la soustraction des logarithmes, la puissance revient à une multiplication, la racine à une division. On comprend par là toute l'utilité des logarithmes.

Logarithmes vulgaires.

213. Les deux progressions par lesquelles on définit les logarithmes dont on fait habituellement usage, et qu'on appelle pour cette raison *logarithmes vulgaires*, sont les suivantes :

$$\div\div\ 1 : 10 : 100 : 1000 : \ldots\ldots,$$
$$\div\ 0 \,.\, 1 \,.\, 2 \,.\, 3\ \ldots\ldots$$

Dans ce système, le logarithme de 10 est 1, celui de 100 est 2, celui de 1000 est 3; en général 10^n a pour logarithme le nombre entier n.

On nomme *base* d'un système de logarithmes le nombre qui a pour logarithme l'unité. Le système des logarithmes vulgaires, que l'on appelle aussi logarithmes de *Briggs*, a pour base le nombre *dix*, qui est la base de notre système de numération.

Les logarithmes ont été calculés en décimales ; la partie entière d'un logarithme s'appelle *caractéristique*. Il est aisé de voir que *la caractéristique du logarithme d'un nombre renferme autant d'unités qu'il y a de chiffres dans la partie entière du nombre moins un*. En effet, tout nombre compris entre 1 et 10 n'a qu'un chiffre à sa partie entière; son logarithme, étant compris entre 0 et 1, aura 0 pour partie entière ou pour caractéristique. Tout nombre compris entre 10 et 100 a deux chiffres à sa partie entière; son logarithme, étant compris entre 1 et 2, aura 1 pour caractéristique. De même, tout nombre compris entre 100 et 1000 a 3 chiffres à sa partie entière ; son logarithme, étant compris entre 2 et 3, a 2 pour caractéristique, En général tout nombre compris entre 10^n et 10^{n+1} a $n+1$ chiffres à sa partie entière; son logarithme, étant compris entre n et $n+1$, a n pour caractéristique.

214. Le logarithme de 10^n est n. Si l'on multiplie un nombre a par 10^n, on a

$$\log(a \times 10^n) = \log a + \log 10^n = \log a + n.$$

La partie décimale du logarithme reste la même ; il suffit d'ajouter n unités à la caractéristique.

Si l'on divise un nombre a par 10^n, on a

$$\log \frac{a}{10^n} = \log a - \log 10^n = \log a - n.$$

La partie décimale reste la même; il suffit de retrancher n unités de la caractéristique.

Ainsi, *quand on multiplie ou quand on divise un nombre*

par 10, 100, 1000..., *il suffit d'augmenter ou de diminuer la caractéristique du logarithme d'une, deux, trois ..... unités.*

Il en résulte que, lorsque deux nombres décimaux ne diffèrent que par la place qu'occupe la virgule, leurs logarithmes ont la même partie décimale et ne diffèrent que par la caractéristique. Ceci est important pour la facilité des calculs, parce qu'on a souvent à déplacer la virgule dans les nombres décimaux.

Tables de Callet.

215. Les tables de logarithmes les plus usitées en France sont les petites tables de LALANDE et les grandes tables de CALLET.

Les tables de Lalande contiennent les logarithmes des nombres entiers de 1 à 10000, avec cinq décimales.

On a appris en arithmétique l'usage des tables de Lalande; nous ne parlerons ici que des tables de Callet.

Les tables de Callet contiennent les logarithmes des nombres entiers de 1 à 108000. La première partie de la table, nommée première *chiliade* (premier mille), contient les logarithmes des 1200 premiers nombres avec huit décimales. La table change ensuite de disposition, et donne les logarithmes des nombres de 10200 à 100000, avec sept décimales; à la fin, la table se prolonge de 100000 à 108000, avec huit décimales *. Dans la colonne verticale intitulée N, on lit les dizaines des nombres; les unités sont inscrites au haut de la page et en tête des dix colonnes intitulées 0, 1, 2,... 8, 9. La caractéristique n'est pas indi-

* Callet a prolongé ses tables jusqu'à 108000, parce que 108000 est le nombre de secondes contenues dans l'angle de 30 degrés ou le tiers de l'angle droit.

quée : il est facile de l'ajouter d'après la règle énoncée. Dans la colonne voisine, on trouve les trois premiers chiffres décimaux de chaque logarithme ; les quatre suivants sont inscrits dans la colonne convenable. Si l'on veut, par exemple, le logarithme du nombre 35647, dans la colonne verticale intitulée N on descendra jusqu'au nombre 3564, puis, dans cette ligne horizontale, on s'avancera vers la droite jusqu'à la colonne intitulée 7, et l'on écrira

$$\log 35647 = 4{,}5520230.$$

Le nombre ayant cinq chiffres, on commencera par écrire sa caractéristique 4 ; les trois premiers chiffres décimaux 552 sont communs à un assez grand nombre de logarithmes ; on trouve les quatre derniers, 0230, dans la colonne verticale intitulée 7 *.

Pour effectuer des calculs par logarithmes, il faut savoir résoudre ces deux questions : 1° trouver le logarithme d'un nombre donné ; 2° trouver le nombre qui correspond à un logarithme donné.

Trouver le logarithme d'un nombre donné.

216. *Trouver le logarithme d'un nombre entier.* Si le nombre est dans la limite des tables, s'il est plus petit que 108000, on trouve immédiatement dans les tables le logarithme demandé.

Si le nombre surpasse la limite des tables, on l'y ramène, en le divisant par une puissance de 10. On demande, par exemple, le logarithme du nombre 356478. Afin de rendre ce nombre plus petit que 100000, on le divise par

* L'excellente édition des tables de Callet que vient de publier M. Dupuis contient les logarithmes de 1 à 100000 avec sept décimales.

10, ce qui donne le nombre décimal 35647,8. La question revient à chercher le logarithme de ce nombre décimal; car, une fois ce logarithme trouvé, en ajoutant 1 à sa caractéristique, on aura le logarithme demandé.

Les tables donnent le logarithme de la partie entière 35647. La différence entre ce logarithme et celui du nombre suivant 35648 est 122 unités du septième ordre décimal. On admet que les accroissements du logarithme sont sensiblement proportionnels aux accroissements du nombre, quand il s'agit d'accroissements moindres que l'unité. On dira donc : puisque, pour une augmentation d'une unité dans le nombre 35647, il faut ajouter 122 au logarithme, pour une augmentation de 0,8 dans le nombre il faudra ajouter au logarithme les $\frac{8}{10}$ de 122, soit $\frac{122\times 8}{10}$, ou 98 unités du septième ordre, en négligeant les unités plus petites.

Mais on trouve cette augmentation toute calculée dans les tables de Callet; car, dans la dernière colonne verticale à droite, on voit, au-dessous de la différence 122, un petit tableau indiquant les augmentations du logarithme qui correspondent à 1, 2, 3, ... 9 dixièmes. Ainsi

$$\begin{array}{r} \log 35647 = 4{,}5520230 \\ \text{pour } 0{,}8 \ldots\ldots \quad \underline{\qquad 98} \\ \log 35647{,}8 = 4{,}5520328. \end{array}$$

En ajoutant une unité à la caractéristique, on a

$$\log 356478 = 5{,}5520328.$$

Nous avons supposé que les accroissements du logarithme sont sensiblement proportionnels aux accroissements du nombre; cette proportion n'est pas rigoureusement exacte et il en résulte une certaine erreur dans le calcul des logarithmes des nombres décimaux. Mais on démontre que, lorsque le nombre est plus grand que 10000, l'erreur com-

mise n'altère pas les sept premiers chiffres décimaux du logarithme; on peut donc regarder la proportion comme exacte.

Soit encore à calculer le logarithme du nombre 2543247. En divisant par 100, on ramènera le nombre proposé au nombre décimal 25432,47, La table donne le logarithme de la partie entière. La table des parties proportionnelles montre qu'à une augmentation 0,4 dans le nombre correspond une augmentation 68 dans le logarithme. Il reste à trouver ce qu'il faut encore ajouter pour 0,07. On voit dans la table qu'à 0,7 correspond une augmentation 120; à 0,07 correspondra donc une augmentation dix fois plus petite, soit 12. Il faut donc au logarithme de 25432 ajouter 68 + 12, c'est-à-dire 80. Faisant le calcul de tête, on écrira de suite

$$\log 25432,47 = 4,4053885.$$

En ajoutant 2 unités à la caractéristique, on en déduit

$$\log 2543247 = 6,4053885.$$

217. Il est bon de remarquer que, dans la recherche du logarithme d'un nombre, il n'y a lieu de considérer que les huit premiers chiffres de gauche; les suivants, n'ayant pas d'influence sur le logarithme, peuvent être supprimés. En effet, supposons la virgule placée après le cinquième chiffre, si l'on néglige le chiffre des dix-millièmes et les suivants, on commet sur le nombre une erreur moindre qu'un millième; la plus grande différence tubulaire étant 434, on commet sur le logarithme une erreur moindre qu'une demi-unité du septième ordre décimal.

On demande, par exemple, le logarithme du nombre 11056,4852. Après avoir cherché dans les tables le logarithme de 11056, on dira, à l'aide des parties proportionnelles placées au-dessous de la différence 393: à 0,4 cor-

respond 157, à 0,8 correspond 31, à 0,005 correspond 2; en tout 190 qu'il faut ajouter au logarithme de 11056, ce qui donne

$$\log 11056,485 = 4,0436170.$$

Quand le premier chiffre est égal ou supérieur à 4, le huitième chiffre n'a pas d'influence sensible sur le résultat. Soit à trouver le logarithme de 46867,284. Après avoir trouvé le logarithme de 46867, on voit qu'à 0,2 correspond une augmentation 18, à 0,08 une augmentation 7; le chiffre des millièmes n'a pas d'influence; il faut donc ajouter 18 + 7 ou 25 au logarithme de 46867, ce qui donne

$$\log 46867,28 = 4,6708697.$$

Quand le chiffre des millièmes est plus grand que 5, on force le chiffre des centièmes.

218. *Trouver le logarithme d'un nombre décimal.* On demande le logarithme du nombre décimal 35,6478. On le multipliera par une puissance de 10, de manière qu'il se rapproche le plus possible de la limite des tables. Si l'on opère avec les tables de Callet, on multipliera par 1000 et on cherchera le logarithme du nombre 35647,8; puis on retranchera trois unités de la caractéristique;

$$\log 35647,8 = 4,5520328$$
$$\log 35,6478 = 1,5520328.$$

219. *Trouver le logarithme d'un nombre fractionnaire.* Il y a deux manières de procéder : ou bien on convertira le nombre fractionnaire en nombre décimal et on appliquera la règle précédente ; ou bien, mettant le nombre fractionnaire sous forme de fraction ordinaire, et remarquant qu'une fraction égale le quotient de son numérateur par son dénominateur, on retranchera du logarithme du numérateur le logarithme du dénominateur.

Caractéristiques négatives.

220. Les deux progressions par lesquelles nous avons défini les logarithmes, nous donnent, avec une approximation aussi grande qu'on veut, les logarithmes de tous les nombres plus grands que l'unité. Voici comment on définit les logarithmes des nombres plus petits que l'unité.

Imaginons que l'on prolonge les deux progressions vers la gauche, comme on les a prolongées vers la droite ; en ce qui concerne la progression géométrique, chaque terme étant égal au terme placé à sa droite divisé par la raison, on prolongera la progression vers la gauche en divisant par la raison ; de même, chaque terme de la progression arithmétique étant égal au terme placé à sa droite, moins la raison, on prolongera cette progression en retranchant la raison. De cette manière, les deux progressions deviennent

$$\ldots\ldots : \frac{1}{q^3} : \frac{1}{q^2} : \frac{1}{q} : 1 : q : q^2 : q^3 : q^4 : \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots - 3r\,.\, - 2r - r\,.\, 0\,.\, r\,.\, 2r\,.\, 3r\,.\, 4r\,.\,\ldots\ldots;$$

les nombres $\frac{1}{q}$, $\frac{1}{q^2}$,....., plus petits que l'unité, auront ainsi des logarithmes négatifs $-r$, $-2r$, ...

La propriété fondamentale des logarithmes, savoir que le logarithme d'un produit égale la somme des logarithmes des facteurs subsiste, pourvu que l'on entende que le logarithme du produit égale la somme *algébrique* des logarithmes des facteurs. En effet, dans la progression géométrique, prenons d'abord deux termes q^m, $\frac{1}{q^n}$, le premier plus grand que l'unité, le second plus petit ; si $m > n$, le produit de ces deux termes sera q^{m-n} ; la somme algébrique des termes

correspondants mr et $-nr$ de la progression arithmétique est $(m-n)r$; c'est le logarithme du produit. Si $m<n$, le produit est $\frac{1}{q^{n-m}}$; la somme algébrique des logarithmes $-(n-m)r$ est le terme correspondant de la progression arithmétique; c'est le logarithme du produit. Prenons maintenant deux facteurs $\frac{1}{q^m}$ et $\frac{1}{q^n}$ plus petits que l'unité; la somme des logarithmes $-mr-nr$ ou $-(m+n)r$ est encore le logarithme du produit $\frac{1}{q^{m+n}}$. Ainsi, dans tous les cas, le logarithme du produit égale la somme algébrique des logarithmes des facteurs.

Le théorème relatif à la multiplication étant ainsi généralisé, ceux relatifs à la division, à l'élévation aux puissances et à l'extraction des racines, qui se déduisent du premier, ont le même degré de généralité.

Reprenons maintenant les progressions qui ont servi à définir les logarithmes vulgaires

$$\ldots\ldots : 0{,}001 : 0{,}01 : 0{,}1 : 1 : 10 : 100 : 1000 : \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots . -3 . -2 . -1 . 0 . 1 . 2 . 3 . \ldots\ldots$$

et prolongeons-les vers la gauche, comme nous l'avons dit; on voit que tous les nombres compris entre 1 et 0,1 ont leurs logarithmes compris entre 0 et -1, les nombres compris entre 0,1 et 0,01 ont leurs logarithmes compris entre -1 et -2, les nombres compris entre 0,01 et 0,001 ont leurs logarithmes compris entre -2 et -3, et ainsi de suite.

221. Mais, dans la pratique, on ne se sert pas de ces logarithmes entièrement négatifs; on laisse positive la partie décimale et on rend négative seulement la partie entière ou la caractéristique. On demande, par exemple, le logarithme du nombre 0,035261. On trouvera dans la table le loga-

rithme du nombre entier 35261, qui est

$$4,5472946.$$

Le logarithme du nombre décimal 3,5261, qui n'a qu'un chiffre à sa partie entière, est

$$0,5472946.$$

Pour passer de ce dernier nombre à la fraction décimale proposée, il faut diviser par 10^2 et par conséquent retrancher 2 unités du logarithme; le logarithme du nombre décimal 0,035261 est donc

$$0,5472946 - 2,$$

ce qu'on écrit plus simplement

$$\bar{2},5472946,$$

la partie décimale restant positive, la caractéristique seule $\bar{2}$ étant négative.

On peut remarquer que ***la caractéristique négative du logarithme d'une fraction décimale est égale au rang du premier chiffre significatif après la virgule.*** En général, soit n le rang du premier chiffre significatif après la virgule; si l'on multiplie par 10^n, le nombre aura un chiffre significatif à sa partie entière, et la caractéristique de son logarithme sera zéro; comme il faut diviser par 10^n pour revenir au nombre proposé, il faudra retrancher n unités du logarithme, ce qui donnera la caractéristique négative n.

Il y a un grand avantage à laisser ainsi positive la partie décimale du logarithme d'un nombre moindre que l'unité; quand on a à calculer le produit de plusieurs facteurs, les uns plus grands que l'unité, les autres plus petits, on additionnera les parties décimales de tous les logarithmes et on retranchera seulement les caractéristiques négatives,

ce qui est très-simple. Et d'ailleurs, c'est sous cette forme que l'on obtient, au moyen des tables, les logarithmes des nombres plus petits que l'unité.

Nous avons écrit le logarithme du nombre 0,035261 sous la forme

$$\bar{2},5472946,$$

laissant positive la partie décimale; en effectuant la soustraction, on a le logarithme négatif

$$-1,4527054.$$

Mais si l'on employait les logarithmes entièrement négatifs, il faudrait additionner les uns, retrancher les autres, ce qui serait beaucoup plus compliqué.

Trouver le nombre qui admet un logarithme donné.

222. Trouver le nombre qui a pour logarithme 4,5520332 avec les tables de Callet. On regarde dans les tables quel est le plus grand logarithme contenu dans le logarithme donné; c'est 4,5520230 qui correspond au nombre 35647; le nombre cherché est donc compris entre 35647 et 35648. Le logarithme donné surpasse le logarithme de 35647 de 102 unités du septième ordre : or la différence tabulaire est 122, c'est-à-dire que si l'on augmente le logarithme de 35647 de 122 unités du dernier ordre, il faudrait augmenter d'une unité le nombre 35647; si l'on suppose les accroissements du nombre proportionnels à ceux du logarithme, à une augmentation 102 dans le logarithme correspondra dans le nombre une augmentation égale à $\frac{102}{122} = 0,83$.

Mais il est plus commode de se servir de la petite table des parties proportionnelles : cette table montre qu'à une augmentation 98 dans le logarithme correspond une aug-

mentation 0,8 dans le nombre. Il reste 4; à l'augmentation 40 dans le logarithme correspond une augmentation 0,3 dans le nombre; à l'augmentation dix fois plus petite 4 correspondra donc une augmentation 0,03. Ainsi à l'augmentation 102 dans le logarithme correspond une augmentation 0,83 dans le nombre. Le nombre cherché est donç 35647,83 à un centième près.

223. On ramène toujours la caractéristique du logarithme donné à être égale à 4, sauf à multiplier ou à diviser ensuite le nombre trouvé par une puissance de 10.

Exemples : 1° Trouver le nombre qui a pour logarithme 5,5520332. Je retranche 1 de la caractéristique pour ramener le logarithme dans les limites des tables, et je cherche le nombre qui a pour logarithme 4,5520332 ; c'est 35647,83. Pour revenir au logarithme donné, il faut ajouter 1 à la caractéristique, et par conséquent multiplier par 10 : le nombre cherché est donc 356478,3 à un dixième près.

2° Trouver le nombre qui a pour logarithme 1,5520332. On ajoutera 3 unités à la caractéristique, et l'on cherchera le nombre qui a pour logarithme 4,5520332 ; c'est 35647,83. Pour revenir au logarithme proposé, il faut retrancher 3 de la caractéristique, et par conséquent diviser par 1000 ; le nombre cherché est donc 35,64783 avec cinq décimales exactes.

On voit qu'il y a un grand avantage à augmenter la caractéristique de manière à opérer dans la partie la plus élevée des tables ; si l'on avait conservé la caractéristique 1, on aurait trouvé le nombre 35,65 avec deux décimales seulement, tandis qu'en opérant comme on l'a fait, on a obtenu cinq décimales.

3° Trouver le nombre qui a pour logarithme $\bar{2}$,5520332. Je cherche le nombre qui a pour logarithme 0,5520332 ; c'est 3,564783. La caractéristique négative $\bar{2}$ indique qu'il

faut diviser ce nombre par 100; le nombre demandé est donc 0,03564783.

224. Il importe de se rendre compte du degré d'approximation avec lequel on obtient les nombres à l'aide de leurs logarithmes. Soit $\log x = a$, le logarithme donné a ayant une caractéristique égale à 4; appelons x_1 le nombre que l'on trouve en opérant comme nous l'avons expliqué, et Δ la différence tabulaire dont on s'est servi. Pour produire une variation d'une unité du septième ordre décimal dans le logarithme, il faut faire varier le nombre d'une quantité $\alpha = \frac{1}{\Delta}$; par conséquent, le mode de calcul adopté donnera les logarithmes approchés

$$\log(x_1 + \alpha) = a + \frac{1}{10^7}, \quad \log(x_1 - \alpha) = a - \frac{1}{10^7};$$

mais on sait que l'erreur causée par la proportion est moindre que $\frac{1}{10^7}$; on a donc

$$\log(x_1 + \alpha) > a, \quad \log(x_1 - \alpha) < a;$$

ainsi le nombre x, qui a pour logarithme a, est compris entre $x_1 - \alpha$ et $x_1 + \alpha$; en prenant la valeur approchée x_1, on commet une erreur moindre que α, c'est-à-dire moindre que $\frac{1}{\Delta}$. Dans le voisinage de 10000 la différence tabulaire est plus grande que 400; l'erreur commise sur le nombre est moindre que $\frac{1}{400}$; le nombre lui-même étant plus grand que 10000, l'erreur relative est moindre que $\frac{1}{4000000}$. A mesure qu'on s'élève dans la table, la différence tabulaire diminue, et par conséquent l'erreur absolue augmente; mais l'erreur relative reste à peu près la même. Par exemple, vers 43500 la

différence tabulaire est 100 et l'erreur absolue moindre que $\frac{1}{100}$; mais l'erreur relative est encore moindre que $\frac{1}{4000000}$. Vers 99000, la différence tabulaire est 44 et l'erreur absolue moindre que $\frac{1}{44}$; l'erreur relative est toujours moindre que $\frac{1}{4000000}$.

Ainsi les tables de Callet donnent les nombres avec une erreur relative inférieure à un quart de millionième.

Remarques sur l'emploi des logarithmes.

225. Multiplication. Lorsque les facteurs sont plus grands que l'unité, on ajoute leurs logarithmes; il n'y a là aucune difficulté.

Lorsque certains facteurs sont plus petits que l'unité, leurs logarithmes ont des caractéristiques négatives qui indiquent la division par des puissances de 10; on aura soin de retrancher ces caractéristiques négatives.

1° Calculer le produit

$$x = 875{,}6348 \times 62{,}82407.$$

On cherchera les logarithmes des deux facteurs et on les ajoutera, ce qui donne le logarithme du produit; puis on cherchera dans les tables le nombre correspondant.

$$\begin{aligned} \log 875{,}6348 &= 2{,}9423230 \\ \log 62{,}82407 &= \underline{1{,}7981261} \\ \log x &= 4{,}7404491 \\ x &= 55010{,}95. \end{aligned}$$

2° Calculer le produit

$$x = 87{,}56348 \times 0{,}06282407$$
$$\log 87{,}56348 = 1{,}9423230$$
$$\log 0{,}06282407 = \bar{2}{,}7981261$$
$$\log x = 0{,}7404491$$
$$x = 5{,}501095.$$

En ajoutant les logarithmes, on trouve 2 pour partie entière; mais, comme il faut retrancher 2, il reste 0.

3° Calculer le produit

$$x = 87{,}56348 \times 0{,}006282407$$
$$\log 87{,}56348 = 1{,}9423230$$
$$\log 0{,}006282407 = \bar{3}{,}7981261$$
$$\log x = \bar{1}{,}7404491$$
$$x = 0{,}5501095.$$

L'addition des logarithmes donne 2 pour partie entière; mais comme il faut retrancher 3, on obtient la caractéristique négative $\bar{1}$.

4° Calculer le produit

$$x\ 0{,}08756348 \times 0{,}006282407$$
$$\log 0{,}08756348 = \bar{2}{,}9423230$$
$$\log 0{,}006282407 = \bar{3}{,}7981261$$
$$\log x = \bar{4}{,}7404491$$
$$x = 0{,}0005501095.$$

L'addition des logarithmes donne 1 pour partie entière; comme il faut retrancher 2 et 3, c'est-à-dire 5, on a la caractéristique négative $\bar{4}$.

226. Division. On sait que, pour effectuer une division, il faut du logarithme du dividende retrancher le logarithme du diviseur. Lorsqu'on n'a qu'une simple division à faire, on peut procéder de cette manière; mais quand on a une

série de multiplications et de divisions à effectuer, il est plus commode de n'avoir que des logarithmes à ajouter. Pour cela on transforme les logarithmes à retrancher, de manière que leurs parties décimales deviennent positives.

Soit, par exemple, à calculer

$$x = \frac{236,39 \times 127,46}{564,87}.$$

Il faut retrancher le logarithme de 564,87, qui est 2,7519485. On écrira

$$\begin{aligned} -2,7519485 &= -2 - 0,7519485 = -3 + (1 - 0,7519485) \\ &= -3 + 0,2480515 = \bar{3},2480515. \end{aligned}$$

On aura donc

$$\begin{aligned} \log 236,39 &= 2,3736291 \\ \log 127,46 &= 2,1053739 \\ -\log 564,87 &= \bar{3},2480515 \\ \hline \log x &= 1,7270545 \\ x &= 53,34019. \end{aligned}$$

Quand on a ainsi rendu positive la partie décimale de — log 564,87, on additionne les parties décimales des trois logarithmes; la soustraction ne porte plus que sur la caractéristique, ce qui est une grande simplification.

Soit encore à calculer

$$x = \frac{0,23639 \times 1,2746}{0,0056487}.$$

Il faut diviser par le nombre 0,0056487, qui a pour logarithme $\bar{3}$,7519485. On écrira

$$\begin{aligned} -\bar{3},7519485 &= +3 - 0,7519485 = 2 + (1 - 0,7519485) \\ &= 2,2480515. \end{aligned}$$

On aura donc

$$\log 0{,}23659 = \bar{1}{,}3736291$$
$$\log 1{,}2746 = 0{,}1053739$$
$$-\log 0{,}0056487 = 2{,}2480515$$
$$\log x = 1{,}7270545$$
$$x = 53{,}34019.$$

Remarquons cette manière de procéder : *Pour retrancher un logarithme, on ajoute une unité à la caractéristique, dont on change ensuite le signe et l'on écrit à la suite le complément arithmétique de la partie décimale.*

Ainsi, dans le premier exemple, au lieu de retrancher $2{,}7519485$, on a ajouté $\bar{3}{,}2480515$. La caractéristique 2, augmentée d'une unité, puis changée de signe, donne $\bar{3}$; en prenant l'excès de l'unité sur la partie décimale 7519485, on obtient le complément 2480515.

Dans le second exemple, au lieu de retrancher $\bar{3}{,}7519485$, on a ajouté $2{,}2480515$. La caractéristique $\bar{3}$, augmentée d'une unité, puis changée de signe, donne 2.

Quand à l'excès de l'unité sur la partie décimale du logarithme, ce qu'on appelle le complément arithmétique, on l'obtient aisément. De 1 il faut retrancher 0,7519485. Or, une unité vaut 9 dixièmes et 10 centièmes ; 10 centièmes valent 9 centièmes et 10 millièmes, etc. L'unité égale donc 0,999999 plus 10 unités du septième ordre. En effectuant la soustraction de gauche à droite, on obtient le complément demandé :

$$\begin{array}{r} 0{,}999999^{10} \\ 0{,}7519485 \\ \hline 0{,}2480515 \end{array}$$

Ainsi, *pour avoir le complément de la partie décimale d'un logarithme, on retranche tous les chiffres de 9, en allant*

de gauche à droite, excepté le dernier que l'on retranche de 10.

Avec un peu d'habitude, on lit immédiatement le complément dans la table, en regardant le logarithme.

227. PUISSANCES. On sait qu'on élève un nombre à une puissance en multipliant son logarithme par l'indice de la puissance.

1° Calculer $x = 5^{10}$. On cherchera d'abord le logarithme de 5, puis on multipliera ce logarithme par 10.

$$\log 5 = 0{,}69897000$$
$$\log x = 6{,}9897000$$
$$x = 9765624.$$

2° Calculer $x = 0{,}4326^3$.

$$\log 0{,}4326 = \bar{1}{,}6360865$$
$$\log x = \bar{2}{,}9082595$$
$$x = 0{,}08095794.$$

En multipliant par 3 la partie décimale 0,6360865 du logarithme, on trouve 1,9082595 ; en multipliant par 3 la caractéristique négative -1, on a -3; il faut donc retrancher 3 de la partie entière du logarithme; ce qui donne $\bar{2}{,}9082595$.

3° Calculer $x = \left(\frac{2}{37}\right)^5$.

$$\log 2 = 0{,}30103000$$
$$-\log 37 = \bar{2}{,}43179828$$
$$\log \tfrac{2}{37} = \bar{2}{,}73282828$$
$$\log x = \bar{7}{,}6641414$$
$$x = 0{,}0000004614678.$$

En multipliant par 5 la partie décimale du logarithme, on trouve 3 pour partie entière. La caractéristique néga-

tive —2, multipliée par 5, donne —10; en retranchant 10 de la partie entière, on obtient la caractéristique négative $\bar{7}$.

228. Racines. On extrait la racine d'un nombre en divisant son logarithme par l'indice de la racine.

1° Calculer $x = \sqrt[3]{478928}$

$$\log 478928 = 5{,}6802702$$
$$\log x = 1{,}8934234$$
$$x = 78{,}23902.$$

2° Calculer $x = \sqrt[3]{0{,}054327}$

$$\log 0{,}054327 = \bar{2}{,}7350157$$
$$\log x = \bar{1}{,}5783386$$
$$x = 0{,}3787377.$$

Afin de rendre la caractéristique négative divisible par 3, je retranche et j'ajoute une unité, et je suppose le logarithme écrit sous la forme

$$-3 + 1{,}7350157.$$

En divisant par 3 la partie négative et la partie positive, on a

$$-1 + 0{,}5783386 = \bar{1}{,}5783386.$$

3° Calculer $x = \sqrt[5]{0{,}0000098763}$

$$\log 0{,}0000098763 = \bar{6}{,}9945943$$
$$\log x = \bar{2}{,}9989189$$
$$x = 0{,}09975137.$$

Je suppose le logarithme écrit sous la forme

$$-10 + 4{,}9945943,$$

afin de rendre la partie négative divisible par 5. En divisant par 5 les deux parties, on a

$$-2 + 0{,}9989189 = \bar{2}{,}9989189.$$

229. *Remarques sur les accroissements des logarithmes.*

En examinant dans les tables la colonne des différences, on voit ces différences aller sans cesse en diminuant. Par exemple, les logarithmes des nombres 486 et 487 diffèrent entre eux de 8927 unités du septième ordre, tandis que ceux des nombres 48624 et 48625 ne diffèrent plus que de 89 unités du même ordre. Il est facile d'expliquer la cause de cette diminution. Soient a et $a+1$ deux nombres entiers consécutifs, la différence de leurs logarithmes est

$$\log(a+1)-\log a=\log\frac{a+1}{a}=\log\left(1+\frac{1}{a}\right);$$

or, à mesure que a augmente, $1+\frac{1}{a}$ diminue et tend vers l'unité : la différence tabulaire diminue donc et tend vers zéro. Si l'on prolongeait les tables indéfiniment, cette différence deviendrait infiniment petite.

Je donne au nombre a un accroissement constant quelconque h, l'accroissement du logarithme

$$\log(a+h)-\log a=\log a=\log\left(\frac{a+h}{a}\right)=\log\left(1+\frac{h}{a}\right)$$

sera d'autant plus petit que a sera plus grand. Ainsi, pour un même accroissement *absolu* donné au nombre, l'accroissement du logarithme diminue à mesure que le nombre augmente. Mais si l'on donnait au nombre un même accroissement *relatif* (j'entends par accroissement relatif le rapport de l'accroissement absolu au nombre lui-même, un nombre, par exemple, éprouve un accroissement relatif de $\frac{1}{1000}$, si on l'augmente de la $\frac{1}{1000}$ partie de sa valeur), l'accroissement du logarithme serait constant. En désignant par k l'accroissement relatif, $k=\frac{h}{a}$, l'accroissement du logarithme devient $\log(1+k)$; c'est une quantité constante, si l'accroissement relatif reste le même.

230. Dans la recherche des logarithmes des nombres, on a supposé les accroissements du logarithme proportionnels à ceux du nombre; cette proportion n'est pas exacte. En effet, si l'on donne au nombre a l'accroissement h, le logarithme subit un certain accroissement; si l'on donne au nombre $a+h$ le même accroissement h, le logarithme subit un nouvel accroissement plus petit que le premier; ainsi; quand l'accroissement du nombre devient double, l'accroissement du logarithme est un peu moindre que le double; et réciproquement, quand l'accroissement du nombre devient moitié, l'accroissement du logarithme est un peu plus grand que la moitié. L'emploi de la proportion donne donc, dans le passage des nombres aux logarithmes, des résultats un peu trop faibles, et, dans le passage des logarithmes aux nombres, des résultats un peu trop forts.

Mais, si l'on a soin d'employer toujours la partie la plus élevée des tables, l'erreur commise sur les logarithmes n'affectera pas les unités du septième ordre décimal; et en effet, dans les tables de Callet, on voit que la même différence tabulaire existe entre plusieurs couples de logarithmes consécutifs. Par exemple, du nombre 68595 au nombre 69744 la différence tabulaire est la même. Dans cet intervalle, pour une unité d'augmentation dans le nombre, le logarithme subit un accroissement constant 63 : pour deux, trois... unités d'augmentation dans le nombre, le logarithme subit donc un accroissement deux, trois... fois plus grand, et par conséquent les accroissements du nombre sont proportionnels à ceux du logarithme, du moins au degré d'approximation des tables.

CHAPITRE IV.

DES INTÉRÊTS COMPOSÉS.

---

231. Ordinairement les intérêts d'un capital prêté se payent chaque année et constituent une rente ; mais il arrive quelquefois qu'on laisse les intérêts s'ajouter au capital, de manière que le capital s'accroisse d'année en année : c'est là ce qu'on appelle *capitaliser* les intérêts, ou placer à *intérêts composés*.

On a appelé *taux* de l'intérêt ce que rapportent 100 francs dans un an ; mais, dans le calcul des intérêts composés, il est plus commode de prendre pour taux l'intérêt de *un* franc en un an, intérêt que, pour abréger, nous désignerons par la lettre r. Ainsi, placer à 5 pour 100, c'est la même chose que placer à 0,05 pour 1 ; dans ce cas $r = 0,05$; placer à 4,50 pour 100, c'est la même chose que placer à 0,045 pour 1 ; dans ce cas, $r = 0,045$.

232. Le capital *un* franc, augmenté de son intérêt, vaut, après une année, $1 + r$; un capital 2460 francs vaudra 2460 fois plus, c'est-à-dire $(1 + r) \times 2460$ ou $2460\,(1 + r)$. En général, si l'on représente par a un capital quelconque, sa valeur au bout d'un an, par l'addition des intérêts, sera $a\,(1 + r)$. Ainsi, *on obtient la valeur d'un capital après une année en multipliant ce capital par l'unité augmentée de l'intérêt de un franc.*

Par exemple, le capital 2460 francs placé à 5 pour 100 vaut au bout d'un an $2460 \times 1,05 = 2583$.

Je suppose maintenant que le capital a soit placé pendant n années. Après une année ce capital devient $a(1+r)$; tel est le capital dû à la fin de la première année et qui produit intérêt pendant la seconde année. Pour savoir ce que devient ce capital $a(1+r)$ par l'addition des intérêts de la seconde année, il faut le multiplier par $1+r$, ce qui fait $a(1+r)(1+r)$ ou $a(1+r)^2$; tel est le capital dû à la fin de la seconde année, et qui produit intérêt pendant la troisième année. Pour savoir ce que devient ce capital $a(1+r)^2$, par l'addition des intérêts de la troisième année, il faut le multiplier par $1+r$, ce qui fait $a(1+r)^2(1+r)$ ou $a(1+r)^3$; tel est le capital dû à la fin de la troisième année, et qui produit intérêt pendant la quatrième année. Le même raisonnement peut être continué indéfiniment; et comme chaque année nouvelle introduit un nouveau facteur $1+r$, la valeur du capital, après n années, sera $a(1+r)^n$. Ainsi, *on obtient la valeur d'un capital, placé à intérêts composés, après un certain nombre d'années, en multipliant ce capital par la valeur d'un franc après un an, élevée à une puissance marquée par le nombre des années.*

Si donc l'on désigne par A la valeur du capital après n années, on a la formule générale

$$(1) \qquad A = a(1+r)^n.$$

Cette formule établit une relation entre les quatre quantités représentées par a, A, n, r, relation qui détermine l'une quelconque d'entre elles, quand on connaît les trois autres. On peut donc, à l'aide de cette relation, résoudre les quatre questions suivantes.

233. Problème I. *Quelle est la valeur d'un capital placé à intérêts composés, et au taux* r, *après* n *années?*

C'est la question traitée précédemment : on calculera A par logarithmes.

Exemple. Trouver la valeur du capital 12540 francs, placé à intérêts composés, à 5 pour 100, après 7 ans.

Je suppose dans tout ce qui suit que l'on opère avec les tables de Callet.

$$\begin{aligned} \log 12540 \ldots\ldots\ldots &= 4,0982975 \\ \log 1,05 = 0,0211893 & \\ 7 \log 1,05 \ldots\ldots\ldots &= 0,1483251 \\ \log A &= 4,2466226 \\ A = 17645,04. & \end{aligned}$$

234. Problème II. *Quel est le capital qui, placé à intérêts composés, au taux* r, *acquiert après* n *années une valeur* A?

La formule précédente donne

$$(2) \qquad a = \frac{A}{(a+r)^n}.$$

Exemple. Quel est le capital qui, placé à intérêts composés à 4,75 pour 100, vaut 24600 francs, après 12 années?

$$\begin{aligned} \log 24600 \ldots\ldots\ldots &= 4,3909351 \\ \log 1,0475 = 0,0201540 & \\ 12 \log 1,0475 \ldots\ldots\ldots &= 0,2418480 \\ \log a \ldots\ldots &= 4,1490871 \\ a = 14093,70. & \end{aligned}$$

235. Problème III. *A quel taux faut-il placer un capital* a, *à intérêts composés, pour qu'après* n *années il acquière une valeur* A?

L'inconnue ici est r; de la formule fondamentale on déduit

$$(3) \qquad 1 + r = \sqrt[n]{\frac{A}{a}}.$$

On calculera de cette manière la quantité $1 + r$; retranchant 1 du résultat, on aura r.

EXEMPLE. A quel taux faut-il placer le capital 14095,70 pour qu'après 12 années il vaille 24600 francs?

$$\begin{aligned} \log 24600 \ldots\ldots\ldots\ldots &= 4,3909351 \\ \log 14095,70 \ldots\ldots\ldots &= 4,1490867 \\ \hline \log A - \log a &= 0,2418484 \\ \log(1+r) &= 0,0201540 \end{aligned}$$

$$1 + r = 1,0475,$$
$$r = 0,0475.$$

Il faut placer le capital à 4,75 pour 100.

236. PROBLÈME IV. *Pendant combien d'années faut-il placer un capital* a, *au taux* r, *à intérêts composés, pour qu'il acquière une valeur* A?

L'inconnue est n; de la formule fondamentale on déduit

$$(4) \qquad (1 + r)^n = \frac{A}{a},$$

et, en prenant les logarithmes,

$$n \log(1 + r) = \log A - \log a;$$

d'où

$$n = \frac{\log A - \log a}{\log(1 + r)}.$$

237. REMARQUE. La formule des intérêts composés a été établie dans l'hypothèse où le capital reste placé pendant un nombre entier d'années. Lorsque le capital reste placé pendant un certain nombre d'années, plus une fraction d'année, on cherche d'abord sa valeur après le nombre entier d'années par la formule des intérêts composés, puis on calcule les intérêts simples de ce nouveau capital pendant la fraction d'années.

Mais il sera plus simple d'appliquer la formule ordinaire

$$A = a(1 + r)^n,$$

dans laquelle on donnera à n des valeurs fractionnaires ; la différence des résultats est négligeable.

Exemple I. Quelle est la valeur du capital 12540 francs, placé à intérêts composés à 5 pour 100, après 7 ans 8 mois ?

Après 7 ans, le capital devient 17645,04 ; ce nouveau capital rapporte 588,17 en 8 mois : donc après 7 ans 8 mois, le capital devient 18233,20.

En donnant à n la valeur fractionnaire $7 + \frac{8}{12}$, on trouve 18228,40 ; la différence est 4,80 ; c'est une quantité relativement très-petite ; elle est plus petite que le $\frac{1}{3000}$ de la grandeur cherchée.

Exemple II. Pendant combien d'années faut-il placer un capital à intérêts composés à 5 pour 100, pour qu'il acquière une valeur double ?

Comme la grandeur du capital n'a aucune influence dans la question, je suppose qu'il s'agisse du capital 1000 francs.

$$n = \frac{\log 2}{\log 1,05};$$

$$\begin{array}{ll|ll} \log 2 & = 0,3010300 & \log 0,30103 & = \bar{1},4786098 \\ \log 1,05 & = 0,0211893 & \log 0,0211893 & = \bar{2},3261167 \\ \hline & & \log n & = 1,1524931 \end{array}$$

$$n = 14,207.$$

Après 14 années le capital n'est pas encore doublé ; après 15 années il est plus que doublé. Après 14 années, le capital 1000 francs devient 1979,93 ; si l'on cherche dans combien de jours le capital 1979,93 produira ce qui manque pour que le capital primitif soit doublé, c'est-à-dire 20,07, on trouve 74 jours. Ainsi à 5 pour 100, le capital est doublé en 14 ans 74 jours.

Si l'on prend la valeur fractionnaire $n = 14,207$ donnée par le calcul, on trouve 14 ans 75 jours. La différence n'est que d'un jour.

Exemple III. A quel taux faut-il placer un capital de 12000 francs à intérêts composés, pour qu'il acquière une valeur de 18000 francs après 9 ans 5 mois?

Dans la formule des intérêts composés, on donnera à n la valeur fractionnaire $9+\frac{5}{12}$. Il serait très-difficile de résoudre autrement la question.

238. Problème V. On a deux billets, l'un d'une somme a payable dans 1 an; l'autre d'une somme b payable dans 5 ans, et on veut les convertir en un seul payable dans 3 ans.

Cherchons la valeur de chacun des deux billets dans 3 ans à l'échéance du troisième billet. A cette époque, 2 ans après son échéance, le premier billet vaudra

$$a(1+r)^2;$$

à cette même époque, 2 ans avant son échéance, le second billet vaut

$$\frac{b}{(1+r)^2}.$$

Si l'on appelle x la somme qui doit être inscrite sur le troisième billet, c'est-à-dire la somme à toucher dans 3 ans, on aura

$$x = a(1+r)^2 + \frac{b}{(1+r)^2}.$$

239. Problème VI. *La population d'un État est de 40 millions d'habitants, elle s'accroît chaque année de $\frac{1}{300}$ de sa valeur; on demande quelle sera la population de cet État dans un siècle.*

J'appelle P la population après un certain nombre d'années; l'année suivante elle sera

$$P+\frac{P}{300} = P\times\left(1+\frac{1}{300}\right) = P\times\frac{301}{300}.$$

Ainsi la population croît année par année, comme les termes d'une progression géométrique dont le premier terme est 40 millions et la raison $\frac{301}{300}$. On demande le 101ᵉ terme de la progression : en désignant par x ce terme, on a

$$x = 40000000 \times \left(\frac{301}{300}\right)^{100}.$$

$$x = 55793600.$$

240. Problème VII. *Les populations de deux États sont, l'une de 20 millions d'habitants, l'autre de 30 millions : la première s'accroît chaque année de $\frac{1}{200}$, la seconde de $\frac{1}{300}$. Dans combien de temps les deux populations seront-elles égales?*

J'appelle n le nombre d'années cherché; après ce nombre d'années, les deux populations étant égales, on aura

$$20000000 \times \left(\frac{201}{200}\right)^n = 30000000 \times \left(\frac{301}{300}\right)^n :$$

d'où

$$2 \times \left(\frac{201}{200}\right)^n = 3 \times \left(\frac{301}{300}\right)^n,$$

$$\left(\frac{201 \times 300}{200 \times 301}\right)^n = \frac{3}{2},$$

$$\left(\frac{603}{602}\right)^n = \frac{3}{2};$$

si l'on prend les logarithmes, il vient

$$n(\log 603 - \log 602) = \log 3 - \log 2,$$

$$n = \frac{\log 3 - \log 2}{\log 603 - \log 602};$$

$$n = 244.$$

QUESTIONS D'ANNUITÈS.

241. PROBLÈME VIII. *Une personne place chaque année une somme* a *pendant* n *années, et laisse les capitaux et les intérêts s'accumuler. On demande quelle sera la valeur totale de tous ces placements après ces* n *années?*

La premier versement, étant placé pendant n années, acquiert une valeur egale à $a(1+r)^n$; le second, étant placé pendant $n-1$ années, acquiert une valeur égale à $a(1+r)^{n-1}$, etc.; enfin le dernier, ne restant placé que pendant un an, vaut $a(1+r)$. La valeur totale après les n années est donc

$$a(1+r)+a(1+r)^2\ldots\ldots+a(1+r)^n;$$

c'est la somme des termes d'une progression géométrique dont la raison est $1+r$; on a ainsi, en désignant par A la somme cherchée,

$$A=\frac{a(1+r)^{n+1}-a(1+r)}{r}=\frac{a(1+r)\left[(1+r)^n-1\right]}{r}.$$

Il est impossible de soumettre directement cette formule au calcul logarithmique; on est obligé de faire deux calculs séparés. On calculera d'abord la quantité $(1+r)^n$, puis A.

EXEMPLE. On place chaque année 1000 francs pendant 20 ans à 5 pour 100.

$$(5)\qquad A=1000\,\frac{1,05\,(1,05^{20}-1)}{0,05}=21000\times(1,05^{20}-1).$$

Calcul de $1,05^{20}$	Calcul de A.
$\log 1,05 = 0,0211893o$	$\log 21000 = 4,3222193$
$20\log 1,05 = 0,4237860$	$\log 1,6533 = 0,2183517$
$1,05^{20} = 2,6533$	$\log A = 4,5405710$
	$A = 34719^f,30$

242. PROBLÈME IX. *Une personne emprunte actuellement une somme* A, *et voudrait se libérer en* n *années par* n *paye-*

ments égaux effectués à la fin de chaque année. On demande quel doit être le montant de chacun des payements?

Je désigne par x le montant de chaque payement et je suppose qu'on règle les comptes à la fin de la n^e année; la somme due est alors $A(1+r)^n$. Le premier versement, ayant été fait $n-1$ années auparavant, vaut, au moment du règlement, $x(1+r)^{n-1}$, le second versement, ayant été fait $n-2$ années auparavant, vaut $x(1+r)^{n-2}$, et ainsi de suite; l'avant-dernier versement, ayant été fait, il y a un an, vaut $x(1+r)$; enfin le dernier, étant fait au moment même vaut x. La valeur totale des n payements annuels est donc, au moment du règlement de compte,

$$x+x(1+r)+x(1+r)^2\ldots\ldots+x(1+r)^{n-1},$$

ou, en faisant la somme,

$$x\times\frac{(1+r)^n-1}{r}.$$

La somme qui reste due à la fin de la n^e année est donc

$$A(1+r)^n-x\times\frac{(1+r)^n-1}{r}.$$

Si la dette est acquittée, on a l'équation

$$A(1+r)^n-x\times\frac{(1+r)^n-1}{r}=0;$$

d'où l'on déduit

$$x=\frac{Ar(1+r)^n}{(1+r)^n-1}.$$

Cette formule présente le même inconvénient que la précédente; il est impossible de la soumettre directement au calcul logarithmique. On calculera d'abord $(1+r)^n$; puis x.

FIN.

Paris. — Imprimé par E. THUNOT et Cᵉ, 26, rue Racine.

